Lois usuelles
Exercices

Loi uniforme

★ Exercice 19.1

On lance une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer effectué associe le nombre 1 si on obtient pile et le nombre 2 si on obtient face.
Déterminer la loi de probabilité de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Correction :

X prend les valeurs 1 et 2 de façon équiprobable. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,2 \rrbracket)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$. Alors,

① X prend chacune des valeurs de 1 à n de façon équiprobable : $X(\Omega)=\llbracket 1,n \rrbracket$.

② $\forall k \in X(\Omega),\ P(X=k)=\dfrac{1}{n}$.

③ $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$

④ $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

On a donc : $E(X)=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$ et $V(X)=\dfrac{2^2-1}{12}=\dfrac{4-1}{12}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$.

★ Exercice 19.2

On lance un dé à six faces bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer effectué associe le numéro de la face supérieure.
Déterminer la loi de probabilité de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Correction :

X prend les valeurs 1 et 6 de façon équiprobable. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.

On a donc : $E(X)=\dfrac{6+1}{2}=\dfrac{7}{2}$ et $V(X)=\dfrac{6^2-1}{12}=\dfrac{36-1}{12}=\dfrac{35}{12}$.

★ **Exercice 19.3** ***(démonstration de cours)***

Dans cet exercice, on n'utilise pas les formules, on les démontre.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage. Soit X la variable aléatoire qui associe le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, puis $E(X)$.

2. On admet que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $V(X)$.

Correction :

1. X prend les valeurs 1 et n de façon équiprobable. La loi de X est donc :

x_i	1	…	n
p_i	$\dfrac{1}{n}$		$\dfrac{1}{n}$

Dès lors : $E(X)=\dfrac{1}{n}\times 1+\ ...\ +\dfrac{1}{n}\times n=\dfrac{1}{n}(1+\ ...\ +n)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k$.

Rappel : $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit : $E(X)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{1}{\cancel{n}}\times\dfrac{\cancel{n}(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2}$.

2. $$E(X^2)=\frac{1}{n}\times 1^2+\ ...\ +\frac{1}{n}\times n^2=\frac{1}{n}(1^2+\ ...\ +n^2)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{\cancel{n}}\times\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X^2)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^2+n+2n+1}{6}=\frac{2n^2+3n+1}{6}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{2n^2+3n+1}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{2n^2+3n+1}{6}-\frac{n^2+2n+1}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \quad V(X)=\frac{2(2n^2+3n+1)-3(n^2+2n+1)}{12}=\frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12}=\frac{n^2-1}{12}$$

★ Exercice 19.4

Une urne contient 1 boule rouge et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On pioche successivement et sans remise les trois boules. On note X le numéro du tirage auquel est apparue la boule rouge.

1. Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

2. Donner les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Correction :

1. La boule rouge peut apparaître en 1$^{\text{re}}$, 2$^{\text{e}}$ ou 3$^{\text{e}}$ position : $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$

Soit R_i l'événement : « la boule rouge est obtenue au i-ème tirage avec $i \in [\![1,3]\!]$.

★ La boule rouge est obtenue en première position si elle est obtenue immédiatement.

$$P(X=1) = P(R_1) = \frac{1}{3}.$$

★ Pour que la boule rouge soit obtenue au deuxième tirage, il faut tirer une boule blanche en premier (deux chances sur trois), la retirer de l'urne, puis tirer la boule rouge (une chance sur deux).

$$P(X=2) = P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = P\left(\overline{R_1}\right) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}.$$

★ Pour que la boule rouge soit obtenue au troisième tirage, il faut tirer une boule blanche en premier (deux chances sur trois), la retirer de l'urne, tirer une boule blanche en deuxième (une chance sur deux) puis tirer la boule rouge qui est la seule restante (une chance sur une).
D'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=3) = P\left(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3\right) = P\left(\overline{R_1}\right) \times P_{\overline{R_1}}\left(\overline{R_2}\right) \times P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(R_3) = \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Finalement, $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1,3]\!]\right)$.

Remarque : en ECP3, cette situation sera *connue* : la loi de première apparition dans le cas de tirages sans remise est uniforme.

2. On en déduit : $E(X) = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $V(X) = \dfrac{3^2-1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

Loi binomiale

★ Exercice 19.5

On jette 180 fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Donner $X(\Omega)$ puis, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.

3. Quelles sont les valeurs de l'espérance mathématique et de l'écart-type du "chiffre 6" ?

Correction :

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors,

① X compte le **nombre de succès** lors de ***n*** répétitions identiques et indépendantes d'une même épreuve à deux issues possibles de probabilité de succès ***p***.

② $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

③ $\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

④ $E(X) = n \times p$.

⑤ $V(X) = n \times p \times (1-p)$.

1. Il s'agit de 180 répétitions identiques et indépendantes d'une même épreuve à deux issues possibles :

- succès : « on obtient 6 », de probabilité $\dfrac{1}{6}$.
- échec : « on n'obtient pas le nombre 6 », de probabilité $\dfrac{5}{6}$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 180 et $\dfrac{1}{6}$.

2. $X(\Omega) = [\![0, 180]\!]$.

$$\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{180}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{180-k}.$$

3. $E(X) = 180 \times \dfrac{1}{6} = 30$.

$$V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 30 \times \frac{5}{6} = 5 \times \cancel{6} \times \frac{5}{\cancel{6}} = 25.$$

★ **Exercice 19.6**

On jette 6 fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X le nombre de face obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Donner $X(\Omega)$ puis, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X=k)$. Donner enfin $E(X)$ et $V(X)$.

2. Parcours vert : Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) exactement 2 fois “face” ? exactement 3 fois “face” ?

b) au moins 5 fois “face” ?

Correction :

1. Il s'agit de 6 répétitions identiques et indépendantes d'une même épreuve à deux issues possibles :

- succès : « on obtient face », de probabilité $\frac{1}{2}$.
- échec : « on obtient pile », de probabilité $\frac{1}{2}$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$.

$X(\Omega) = [\![0,6]\!]$.

$\forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^6$.

$E(X) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$.

$V(X) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2. a) On demande de calculer $P(X=2)$ puis $P(X=3)$.

$$P(X=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6\times 5}{2} \times \frac{1}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

$$P(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6\times5\times4}{3\times2} \times \frac{1}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{\cancel{4}\times 5}{\cancel{4}\times 16} = \frac{5}{16}.$$

b) On demande de calculer $P(X \geq 5)$.

$$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \geq 5) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64}.$$

★ Exercice 19.7

Un site internet propose des jeux en ligne. Dans un jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à 0,25. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2. Calculer $p(X=0)$ puis calculer $p(X=2)$.

3. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ?

4. Déterminer l'espérance de X et la variance de X.

5. Le joueur doit payer 20 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? Justifier.

Correction :

1. Il s'agit de 10 répétitions identiques et indépendantes d'une même épreuve à deux issues possibles :

- succès : « le joueur gagne la partie », de probabilité 0,25.
- échec : « le joueur perd la partie », de probabilité 0,75.

X compte le nombre de succès.
X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et 0,25.

$X(\Omega)=[\![0,10]\!]$.

$\forall k\in X(\Omega),\ P(X=k)=\binom{10}{k}\times 0,25^k\times 0,75^{10-k}$.

Il est recommandé de <u>toujours</u> donner $X(\Omega)$ *et* $\forall k\in X(\Omega),\ P(X=k)$.

2. $P(X=0)=\binom{10}{0}\times 0,25^0\times 0,75^{10-0}=1\times 1\times 0,75^{10}=0,75^{10}$.

$P(X=2)=\binom{10}{2}\times 0,25^2\times 0,75^{10-2}=\dfrac{10\times 9}{2}\times 0,25^2\times 0,75^8=45\times 0,25^2\times 0,75^8$.

3. On demande de calculer $P(X\geq 1)$.

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0,75^{10}$.

4. $E(X)=10\times 0,25=2,5$ et $V(X)=10\times 0,25\times 0,75=2,5\times 0,75=1,875$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 2} \\ 2\ 5 \\ \times\ 7\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 5 \\ +\ 1\ 7\ 5\ . \\ \hline 1\ 8\ 7\ 5 \end{array}$$

5. En moyenne, le joueur gagne 2,5 parties lorsqu'il joue 10 parties. Autrement dit, le joueur gagne en moyenne $2,5\times 8=20$ € pour 10 parties jouées.
Si la mise de départ est 20 €, alors le jeu est équitable.

★ Exercice 19.8

Un serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note *X* la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. **a)** Donner la loi de *X*. On précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire *X*.

2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note *Y* le bénéfice total de la société pour 100 appels.
Justifier que $Y = 90X + 500$. En déduire l'espérance et la variance de *Y*.

Correction :

1. **a)** Il s'agit de 100 répétitions identiques et indépendantes d'une même épreuve à deux issues possibles :

- succès : « l'appel concerne le produit A », de probabilité 0,95.
- échec : « l'appel concerne le produit B », de probabilité 0,05.

X compte le nombre de succès.
X suit donc la loi binomiale de paramètres 100 et 0,95.

$X(\Omega) = [\![0,100]\!]$.

$\forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = \binom{100}{k} \times 0,95^k \times 0,05^{100-k}$.

	2	
	9	5
×		5
4	7	5

b) $E(X) = 100 \times 0,95 = 95$ et $V(X) = 100 \times 0,95 \times 0,05 = 95 \times 0,05 = 4,75$.

2. Il y a *X* appels qui concernent le produit A et chaque appel rapporte 95 €. Comme il y a 100 appels au total, il y a $100 - X$ appels qui concernent le produit B et chacun d'entre eux rapporte 5 €.

Le bénéfice total pour 100 appels est donc :

$Y = X \times 95 + (100 - X) \times 5 = 95X + 500 - 5X = 90X + 500$.

Par linéarité de l'espérance :

$E(Y) = E(90X + 500) = 90 \times E(X) + 500 = 90 \times 95 + 500 = 9\ 050$ €.

De plus :

$V(Y) = V(90X + 500) = 90^2 V(X) = 90^2 \times 4,95 = 8100 \times 4,75 = 38\ 475$.

			6	4	
			4	7	5
		×		8	1
			4	7	5
+	3	8	0	0	.
	3	8	4	7	5