Intégration
Exercices

Calcul d'intégrales

★ Exercice 20.1

Calculer :

$I_1 = \int_1^3 x\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_1^2 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x$, $I_3 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $I_4 = \int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

$I_5 = \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$, $I_6 = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x - 1\right)\mathrm{d}x$, $I_7 = \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$, $I_8 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$,

$I_9 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Correction :

$$I_1 = \int_1^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2\right) = \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{8 - 12 - 1 + 3}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$I_3 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} = (\ln \mathrm{e}) - (\ln 1) = 1 - 0 = 1.$$

$$I_4 = \int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^5} = \left(\ln \mathrm{e}^5\right) - \left(\ln \mathrm{e}^2\right) = 5 - 2 = 3.$$

$$I_5 = \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+2)\right]_0^2 = (\ln 4) - (\ln 2) = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

$$I_6 = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x - 1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) - 0 = \frac{3 + 4 + 6 - 12}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$I_7 = \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_4^9 = \left(2\sqrt{9} - 2\sqrt{4}\right) = 2\times 3 - 2\times 2 = 6 - 4 = 2.$$

$$I_8 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln 2\right) - \left(-\frac{1}{2} - 1 + \ln 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad I_8 = -\frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} + \ln 2 + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \ln 2 = \frac{7}{8} + \ln 2.$$

Remarque :

$\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln x$. Une primitive est donc de la forme $\dfrac{u^2}{2}$.

$$I_9 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \left((\ln \mathrm{e})^2\right) - \left((\ln 1)^2\right) = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Relation de Chasles

★ Exercice 20.2

1. Soit f la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

On considère l'intégrale : $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Sur combien d'intervalles est définie la fonction f ?

b) Sur quel intervalle est définie l'intégrale ? Est-il nécessaire de la découper en plusieurs intégrales pour la calculer ? Si oui, en combien d'intégrales ?

c) Calculer $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On considère l'intégrale : $\int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Sur combien d'intervalles est définie la fonction g ?

b) Sur quel intervalle est définie l'intégrale ? Est-il nécessaire de la découper en plusieurs intégrales pour la calculer ? Si oui, en combien d'intégrales ?

c) Calculer $\int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$

3. Soit h la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x & \text{si } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\int_0^6 h(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Soit j la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $j(x) = \begin{cases} a\,x(2-x) & \text{pour } x \in [0\,;\,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

où a est un réel. Calculer $\int_{-4}^3 j(x)\,\mathrm{d}x$.

E.C.P.1 – Jean PERRIN

Correction :

<u>Remarque</u> :
Dans cet exercice, chaque fonction est définie en *plusieurs morceaux* séparés par des *valeurs frontières* en lesquelles il peut y avoir cassure de la fonction (c'est-à-dire discontinuité) ou raccordement (c'est-à-dire continuité).

La vie économique et financière regorge de fonctions définies par morceaux :

- tirages de photos numériques : 4 formules selon le nombre de tirages

Format 10x15 cm classique brillant	Prix unitaire	
La photo	0,18 €	
A partir de 100 photos : -25% avec le code PACK25AU	0,13 €	~~0,18 €~~
A partir de 500 photos : -40% avec le code PACK40AU	0,11 €	~~0,18 €~~
A partir de 1000 photos : -50% avec le code PACK50AU	0,09 €	~~0,18 €~~

Dans cet exemple, il y a <u>discontinuité</u> à chaque frontière (le vérifier).

- calcul de l'impôt sur le revenu par nombre de parts : 5 formules

Calcul de l'impôt 2020 sur les revenus de 2019

Résultat du calcul « R/N »	Formule de calcul de l'impôt	Tranche marginale d'imposition
De 0 € à 10 064 €	0	0%
De 10 064 € à 27 794 €	(R * 0.14) – (1 408.96* N)	14%
De 27 794€ à 74 517€	(R * 0.30) – (5 856 * N)	30%
De 74 517€ à 157 806 €	(R * 0.41) – (14 052.87 * N)	41%
Au-delà de 157 806€	(R * 0.45) – (20 365.11 * N)	45%

Dans cet exemple, il y a <u>continuité</u> à chaque frontière (le vérifier).

La relation de Chasles permet de décomposer le calcul d'une intégrale sur plusieurs morceaux.

1. a) *f* est définie sur deux intervalles :

① si $x \in]-\infty\ ;\ 2]$ alors $f(x)=1$

② si $x \in]2\ ;+\infty[$ alors $f(x)=3$

et il y a une valeur frontière : $x=2$.

b) L'intégrale $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. Cet intervalle contient la valeur frontière $x=2$. Il est donc nécessaire de calculer l'intégrale en la découpant en deux pour utiliser convenablement chacune des deux formules de la fonction *f*.

c) D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + \int_2^5 3\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = [x]_0^2 + [3x]_2^5\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{(2)-(0)}_{[x]_0^2} + \underbrace{(3\times5)-(3\times2)}_{[3x]_2^5}\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2-0+15-6 = 11\ .$$

---

2. a) *g* est définie sur trois intervalles :

① si $x \in]-\infty\ ;\ 0[$ alors $g(x)=0$

② si $x \in [0;1]$ alors $g(x)=1$

③ si $x \in]1\ ;+\infty[$ alors $g(x)=0$

et il y a deux valeurs frontières : $x=0$ et $x=1$.

b) L'intégrale $\int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ est définie sur l'intervalle $[-2;3]$. Cet intervalle contient les deux valeurs frontières. Il est donc nécessaire de calculer l'intégrale en la découpant en trois pour utiliser convenablement chacune des trois formules de la fonction *g*.

c) D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^3 0\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = [0]_{-2}^0 + [x]_0^1 + [0]_1^3\ ,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{(0)-(0)}_{[0]_{-2}^0} + \underbrace{(1)-(0)}_{[x]_0^1} + \underbrace{(0)-(0)}_{[0]_1^3} = 0-0+1-0+0-0 = 1\ .$$

---

3. D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^6 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^6 h(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^6 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x + \int_1^2 x\ \mathrm{d}x + \int_2^3 -x\ \mathrm{d}x + \int_3^6 0\ \mathrm{d}x\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^6 h(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + 0\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^6 h(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left(\frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right)}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2} + \underbrace{\left(-\frac{3^2}{2}\right) - \left(-\frac{2^2}{2}\right)}_{\left[-\frac{x^2}{2}\right]_2^3} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{2}{2} = -1\,.$$

---

4. D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-4}^3 j(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^0 j(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 j(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 j(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-4}^3 j(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^0 0\,\mathrm{d}x + \int_0^2 a\,x(2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 0\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-4}^3 j(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^2 \left(2a\,x - a\,x^2\right)\mathrm{d}x + 0 \ \text{ (on a développé),}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-4}^3 j(x)\,\mathrm{d}x = \left[a\,x^2 - a\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(a\times 2^2 - a\times\frac{2^3}{3}\right) - \left(a\times 0^2 - a\times\frac{0^3}{3}\right),$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-4}^3 j(x)\,\mathrm{d}x = 4a - \frac{8}{3}a - 0 = \frac{12}{3}a - \frac{8}{3}a = \frac{4}{3}a\,.$$

Signe d'une intégrale

★ Exercice 20.3

Sans les calculer, déterminer le signe de $\int_2^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ et de $\int_{0,5}^{0,8} \ln x\ \mathrm{d}x$.

Correction :

Signe d'une intégrale :

	Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$	Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$
Bornes : $a \leq b$	L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$	L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$
Bornes à l'envers : $a \geq b$	L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$	L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

☆ Signe de $\int_2^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$:

① $f(x)=\sqrt{x}\geq 0$ sur $[1;2]$

② les bornes sont « à l'envers » $(2\geq 1)$

On en déduit que : $\int_2^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leq 0$.

☆ Signe de $\int_{0,5}^{0,8} \ln x\,\mathrm{d}x$:

① $f(x)=\ln x\leq 0$ sur $[0,5;0,8]$

② les bornes sont dans « le bon sens » $(0,5\leq 0,8)$

On en déduit que : $\int_{0,5}^{0,8} \ln x\,\mathrm{d}x \leq 0$.

Calcul d'intégrales quand une primitive est donnée/suggérée

★ **Exercice 20.4**

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln(2x)-x$, est une primitive de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(2x)$.

2. En déduire la valeur de $J=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln(2x)\mathrm{d}x$.

Correction :

1. Il s'agit de dériver $F(x)$.

Formule : $(uv-w)'=u'v+v'u-w'$

$$F(x)=1\times\ln(2x)+\frac{2}{2x}\times x-1=\ln(2x)+\frac{1}{x}\times x-1=\ln(2x)+1-1=\ln(2x).$$

F est bien une primitive de la fonction *f*.

2. Dès lors :

$$J=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln(2x)\mathrm{d}x=\left[x\ln(2x)-x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\left(1\times\ln(2\times 1)-1\right)-\left(\frac{1}{2}\times\ln\left(2\times\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad J=\ln(2)-1-\frac{1}{2}\times\ln(1)+\frac{1}{2}=\ln(2)-1-0+\frac{1}{2}=\ln(2)-\frac{1}{2}.$$

★ **Exercice 20.5**

On appelle *f* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-2$.

1. Dériver la fonction *g* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x(\ln x)^2$.

2. Calculer la valeur exacte de $I=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction :

1. Formule : $\left(u\times v^2\right)'=\underbrace{u'}_{U'}\times\underbrace{v^2}_{V}+\underbrace{2\times v'\times v}_{V'}\times\underbrace{u}_{U}$.

$$g'(x)=1\times(\ln x)^2+2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\ln x\times\cancel{x}=(\ln x)^2+2\ln x.$$

2. D'après la question précédente, $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-2=g'(x)-2$.

Une primitive de $f(x)$ est donc $F(x)=g(x)-2x=x(\ln x)^2-2x$. On en déduit :

$$I=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[x(\ln x)^2-2x\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=\left(\mathrm{e}^2\left(\ln \mathrm{e}^2\right)^2-2\mathrm{e}^2\right)-\left(\mathrm{e}(\ln \mathrm{e})^2-2\mathrm{e}\right),$$

$$\Leftrightarrow\quad I=\left(\mathrm{e}^2\times 2^2-2\mathrm{e}^2\right)-\left(\mathrm{e}\times 1^2-2\mathrm{e}\right)=\left(4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2\right)-\left(\mathrm{e}-2\mathrm{e}\right)=4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2\mathrm{e},$$

$$\Leftrightarrow\quad I=2\mathrm{e}^2+\mathrm{e}.$$