Exercices d'approfondissement « Fonctions » 2

Exercice 1

1. Justifier que l'équation $x^2+x+1=0$, d'inconnue réelle *x*, n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de *f*.

2. Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de *f*.
On remarquera en particulier que *f* est croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

4. **(a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

(b) Montrer que pour tout réel *x* de $[-1\,;+\infty[$, on a : $f(x)\leq x$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.

5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé.
On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T).

Exercice 2

Soit *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-\ln(x)$.

1. **a)** Montrer que la dérivée de *g* vérifie pour tout réel $x>0$ l'égalité : $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

b) Calculer $g(1)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

d) Dresser le tableau des variations de *g* sur $]0;+\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions **1.b)** et **1.c)**.

e) Justifier que pour tout réel $x>0$ on a : $g(x)>0$.

2. Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x-\ln(x)}$.

a) Montrer que pour tout réel $x>0$ on a : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x(x-\ln(x))^2}$.

b) Déduire de **1.c)** les limites de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0 et $+\infty$.

c) Dresser le tableau des variations de *f* sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question **2.b)** ainsi que $f(1)$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(x)=x$ dans $]0;+\infty[$.

a) Montrer que, pour tout réel $x>0$, l'équation $f(x)=x$ est équivalente à l'équation : $x-\ln(x)-\dfrac{1}{x}=0$.

On pose donc pour tout réel $x>0$: $h(x)=x-\ln(x)-\dfrac{1}{x}$.

b) Montrer que la dérivée de *h* vérifie pour tout réel $x>0$ l'égalité $h'(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de *h* sur $]0;+\infty[$.

c) On donne : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Dresser le tableau des variations de *h*.

d) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α.

4. Tracer l'allure de la représentation graphique de *f* ainsi que la droite d'équation $y=x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4 cm.

Exercice 3

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm)

3. Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

6. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{D})$.

On montrera en particulier que $(\mathcal{D})$ coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.

7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

8. **(a)** Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a $f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

(b) Étudier la convexité de f. La courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0,4 \qquad \sqrt{\mathrm{e}} \simeq 1,6 \qquad f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) \simeq 1,3 \qquad f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) \simeq 0,1.$$

Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ dans un même repère orthonormé.

Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x)=(\ln(x))^2.$$

2. En déduire une fonction F telle que $F'(x)=f(x)$ puis calculer $F(\mathrm{e})-F(1)$.

Exercice 4

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **(a)** Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

(b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. **(a)** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on précisera une équation.

(b) Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

4. **(a)** Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.