Généralités sur les fonctions

I. Fonctions et représentations graphiques

1. Notion de fonction

Définition :
D est une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.
Définir une fonction sur D c'est associer à chaque réel x de D, un réel et un seul, appelé l'image de x. D est appelé ensemble de définition de la fonction.

Notations :
• Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres f, g, h....
• L'image d'un réel x de D par la fonction f est notée $f(x)$ (lire : "f de x").
• Au lieu d'écrire "f est la fonction qui à x associe $f(x)$" on peut écrire "$f : x \mapsto f(x)$".

Exemple :
f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.
Cette phrase indique que l'ensemble de définition de cette fonction est $[0\,;+\infty[$ et que pour calculer l'image d'un nombre positif, on procède ainsi :
• image de 0 : $f(0) = 0 - 2\sqrt{0} = 0$
• image de 1 : $f(1) = 1 - 2\sqrt{1} = 1 - 2 = -1$
• image de $\frac{7}{4}$: $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} - 2\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{7}{4} - 2\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7}{4} - \sqrt{7}$

2. Courbe représentative d'une fonction

Définition :
f est une fonction définie sur D.
Dans un repère, la courbe représentative C de la fonction f, est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que :

$$x \in D \text{ et } y = f(x).$$

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$ dans ce repère.

- **Notion d'ensemble, d'élément, d'appartenance**

Le mathématicien Georg Cantor énonçait : « Par ensemble, nous entendons toute collection A d'objets x de notre intuition ou de notre pensée, définis et distincts, ces objets étant appelés les éléments de A ».
L'appartenance d'un élément, noté par exemple x, à un ensemble, noté par exemple A, s'écrit : $x \in A$. « $x \in A$ » peut se lire :

- « x **appartient à** A »,
- « x **est élément de** A »,
- « x **est dans** A »,
- « A **a pour élément** x »,
- « A **possède** x »,
- ou parfois « A **contient** x » (il y a ambiguïté cependant dans ce dernier cas, A contient x peut signifier que x est un sous-ensemble de A, c'est-à-dire que x est un ensemble et que tous ses éléments appartiennent à A, ce qui est très différent de « x **appartient à** A »).

« $x \notin A$ » signifie « x n'appartient pas à A »

II. Sens de variation d'une fonction

1. Fonction croissante, décroissante sur un intervalle

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

- Notion de stricte croissance

- **Notion de proposition conditionnelle**

Une proposition (ou assertion) est un énoncé pouvant être vrai ou faux.
Exemple : on considère un oiseau, la phrase « c'est un corbeau » est une proposition.
Dire qu'une proposition A implique une proposition B (on note $A \Rightarrow B$) signifie : « si A est vraie alors B est vraie elle aussi ».

- Notion d'intervalle de $\mathbb{R}$ (9 formes d'intervalles)

Conséquences :
Une fonction croissante conserve l'ordre :
pour tous réels *a* et *b* de *I*, $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que *a* et *b*.

Exemple : fonction carré sur $[0\,;+\infty[$. Qu'en est-il sur $]-\infty\,;0]$?

Une fonction décroissante "renverse" l'ordre :
pour tous réels *a* et *b* de *I*, $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de *a* et *b*.

Exemple : fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$. Qu'en est-il sur $]-\infty\,;0[$?

2. Sens de variation d'une fonction

Voir exercices 4 à 6

3. Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle

f est une fonction définie sur un intervalle *I* et x_0 désigne un réel de *I*.

Dire que $f(x_0)$ est le maximum de *f* sur *I* signifie que : pour tout *x* de *I*, $f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que *f* est majorée sur *I*.

Dire que $f(x_0)$ est le minimum de *f* sur *I* signifie que : pour tout *x* de *I*, $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit que *f* est minorée sur *I*.
Une fonction à la fois majorée et minorée est dite bornée.

III. Fonctions affines

1. Les fonctions linéaires

Une fonction linéaire est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque nombre réel *x* associe le nombre $a\,x$. On note $f(x) = a\,x$.

Le nombre *a* est le coefficient de proportionnalité.

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x$ est une droite qui passe par l'origine du repère. On dit que cette droite a pour équation $y = a\,x$.

Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ est une droite (non verticale) passant par l'origine, alors *f* est linéaire.

- Notion de réciproque d'une proposition conditionnelle

- **Notion de sous-ensemble (ou partie), d'inclusion**

  Soient A et B deux ensembles. Si tout élément x de A est aussi un élément de B, on dit que A est inclus dans B (ou que B contient A) et on note $A \subset B$.
  A est un sous-ensemble (ou une partie) de B.

Remarque : Une droite étant définie par deux points, une fonction linéaire est alors entièrement déterminée par la donnée d'un point autre que l'origine.

2. Les fonctions affines

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque nombre réel x associe le nombre $ax+b$. On note $f(x)=ax+b$.
Le nombre a est appelé coefficient directeur et le nombre b, ordonnée à l'origine.

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x)=ax+b$ est une droite non verticale. On dit que cette droite a pour équation $y=ax+b$.
Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une droite non verticale, alors f est affine.

Lorsque $b=0$, $f(x)=ax$; f est alors une fonction linéaire de coefficient a.
Une fonction linéaire est donc une fonction affine.
Lorsque $a=0$, $f(x)=b$; ainsi, à chaque nombre x on associe constamment le même nombre fixe b. La représentation graphique de f est la droite d'équation $y=b$.
Elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Une fonction affine est déterminée par la donnée de deux points et de leur image.

3. Racine d'un polynôme du premier degré (fonction affine)

- **Notion de polynôme**

  On appelle fonction polynôme toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un entier naturel n et des réels $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ tels que :

  $$\text{pour tout réel } x,\ \mathrm{P}(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Soit P un polynôme, différent du polynôme nul, dont la forme réduite est :
$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, pour tout réel x, avec $a_n \neq 0$.

Les réels a_i sont appelés les coefficients du polynôme P.

L'entier naturel n est appelé le degré du polynôme P.

Un terme $a_k x^k$ est appelé un monôme de degré k.

Toute fonction constante non nulle est une fonction polynôme de degré 0.

Toute fonction affine non nulle est une fonction polynôme de degré 1.

Tout polynôme de degré 2, c'est-à-dire de forme réduite $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est appelé un trinôme du second degré.

Soit P un polynôme et x_0 un réel.

On dit que x_0 est une racine réelle du polynôme P lorsque $\mathrm{P}(x_0) = 0$.

Résolution de l'équation $f(x) = 0 \ldots$

Une fonction affine possède une seule racine : $-\dfrac{b}{a}$.

4. Variations des fonctions affines

Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

5. Signe d'une fonction affine

Technique : résolution de l'inéquation $f(x) \geq 0 \ldots$

Vérification avec le sens des variations.

6. Détermination d'une fonction affine connaissant deux nombres et leurs images

Si $x_1 \neq x_2$, $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Puis on détermine b… Voir exercices 19 à 22