Généralités sur les fonctions
Exercices

Intervalles

★ Exercice 1.1

Compléter le tableau suivant donnant trois traductions de chaque énoncé, sachant que x est un nombre réel :

Intervalle	Inégalité(s)	Langue naturelle	Représentation
$x \in [3\ ,\ 5]$			
		x appartient à l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 6	
	$2 \leq x$		

Correction :

Intervalle	Inégalité(s)	Langue naturelle	Représentation
$x \in [3\ ,\ 5]$	$3 \leq x \leq 5$	x appartient à l'ensemble des réels compris entre 3 et 5	
$x \in]-\infty\ ;\ 6]$	$x \leq 6$	x appartient à l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 6	
$x \in [2\ ;+\infty[$	$2 \leq x$	x appartient à l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 2	

★ Exercice 1.2

Dans chaque cas, traduire l'information donnée par l'appartenance de x à un intervalle et représenter cet intervalle sur une droite graduée.

1. $-3 \leq x \leq 7$ **2.** $-9 \leq x < -3$ **3.** $x \leq 11$ **4.** $x > 0$

Correction :

1. $x \in [-3\ ;\ 7]$ **2.** $x \in [-9\ ; -3[$ **3.** $x \in]-\infty\ ;\ 11]$ **4.** $x \in]0\ ; +\infty[$

★ Exercice 1.3

Dans chaque cas, représenter l'intervalle sur une droite graduée et traduire par des inégalités l'appartenance de x à cet intervalle.

1. $]-2\ ;\ 6[$ **2.** $\left]-\dfrac{7}{3}\ ; +\infty\right[$ **3.** $]-\infty\ ;\ 7]$ **4.** $[-5\ ;\ 4[$

Correction :

1. $-2 < x < 6$ **2.** $x > -\dfrac{7}{3}$ **3.** $x \leq 7$ **4.** $-5 \leq x < 4$

Lectures graphiques

★ Exercice 1.4

Le plan est muni du repère orthonormal.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$ dont on donne la courbe représentative C ci-après.

1. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

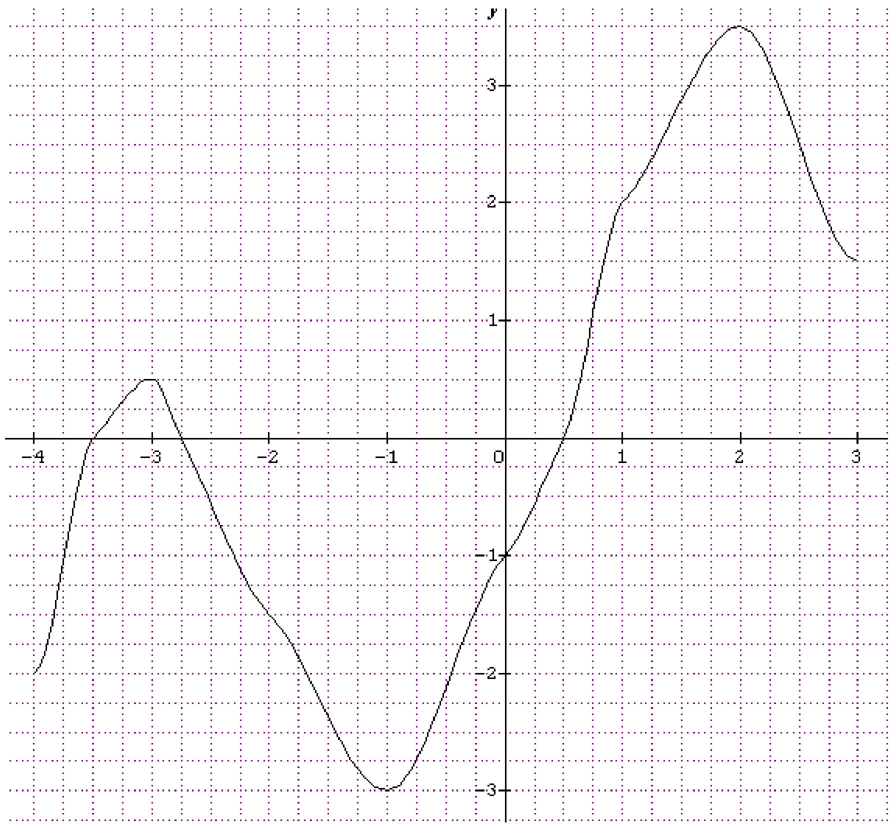
2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans $[-4\ ;\ 3]$?

3. Résoudre graphiquement dans $[-4\ ;\ 3]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. **a)** Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x, comprises entre –4 et 3, le nombre $f(x)$ est positif.

b) En déduire, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-4\ ;\ 3]$.

5. Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.



Correction :

1. Graphiquement :
   $f(-4)=-2$, $f(-3)=0{,}5$, $f(-2)=-1{,}5$, $f(-1)=-3$, $f(0)=-1$, $f(1)=2$, $f(2)=3{,}5$ et $f(3)=1{,}5$.
2. Lorsque x varie dans $[-4\ ;\ 3]$, $f(x)$ varie dans l'intervalle $[-3\ ;\ 3{,}5]$.
3. Graphiquement l'équation $f(x)=0$ possède trois solutions dans $[-4\ ;\ 3]$:
   $x=-3{,}5$, $x=-2{,}75$ et $x=0{,}5$.
4. **a)** Graphiquement, $f(x)$ est positif pour $x\in[-3{,}5\ ;-2{,}75]\cup[0{,}5\ ;\ 3]$.

   b) On en déduit le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-4\ ;\ 3]$:

x	-4		$-3{,}5$		$-2{,}75$		$0{,}5$		3
$signe f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

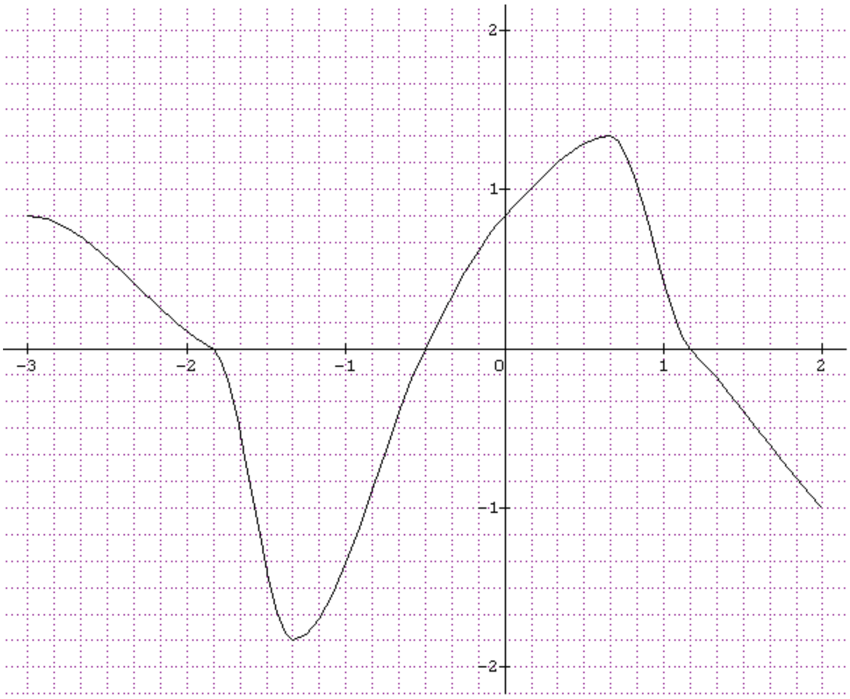
5. Graphiquement :

x	-4		-3		-1		2		3
$var f$			$0{,}5$				$3{,}5$		
	-2	$\nearrow$		$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\searrow$	$1{,}5$

★ Exercice 1.5

Le plan est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$ dont on donne la courbe représentative *C* ci-dessous.



1. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(-3)$, $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $f(2)$.

2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque *x* varie dans $[-3\,;\,2]$?

3. Donner, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque *x* varie dans $[-3\,;\,2]$.

4. Dresser le tableau de variation de *f* sur $[-3\,;\,2]$.

Correction :

1. Graphiquement, $f(-3)=\dfrac{5}{6}$, $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{11}{6}$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$ et $f(2)=-1$.

2. Lorsque *x* varie dans $[-3\,;\,2]$, $f(x)$ varie dans l'intervalle $\left[-\dfrac{11}{6}\,;\,\dfrac{4}{3}\right]$.

3. Graphiquement, le signe de $f(x)$ est :

x	-3		$-\frac{11}{6}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{6}$		2
$signe f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

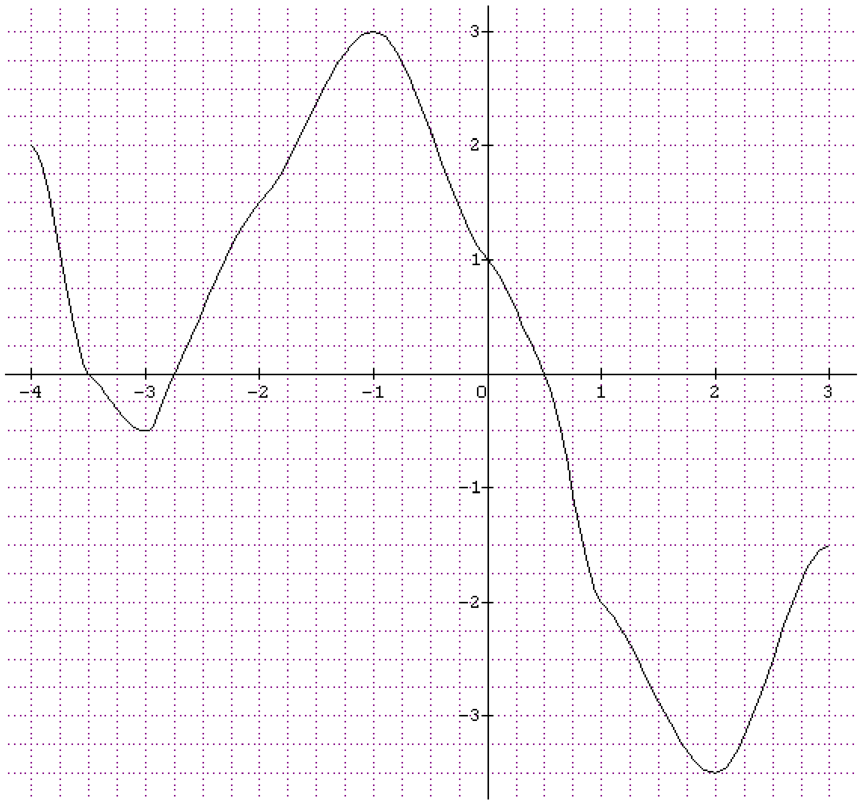
4. Graphiquement, les variations de *f* sont :

x	-3		$-\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$		2
$var\, f$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	$-\frac{11}{6}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	-1

★ **Exercice 1.6 (à faire en devoir maison)**

Le plan est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

Soit *f* la fonction dont on donne la courbe représentative C ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de *f* ?

2. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$.

3. Décrire les variations de *f* sur $[-4\,;\,3]$.

4. Indiquer pour quelles valeurs de *x* la fonction *f* admet un minimum et un maximum.

5. Dresser le tableau de variation de *f* sur $[-4\,;\,3]$.

6. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque *x* varie dans $[-4\,;\,3]$?

7. Résoudre graphiquement dans $[-4\,;\,3]$ l'équation $f(x)=0$.

8. a) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de *x*, comprises entre – 4 et 3, le nombre $f(x)$ est positif.

b) En déduire, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque *x* varie dans $[-4\ ;\ 3]$.

Correction :

1. Graphiquement, *f* est définie sur $[-4\ ;\ 3]$.

2. Graphiquement, $f(-4)=2$, $f(-2)=1,5$, $f(1)=-2$, $f(3)=-1,5$.

3. Graphiquement :

- *f* est décroissante sur $[-4\ ;-3]$;
- *f* est croissante sur $[-3\ ;-1]$;
- *f* est décroissante sur $[-1\ ;\ 2]$;
- *f* est croissante sur $[2\ ;\ 3]$.

4. *f* admet pour minimum $-3,5$. Il est atteint en $x=2$.

f admet pour maximum 3. Il est atteint en $x=-1$.

5. Graphiquement, les variations de *f* sont :

x	-4		-3		-1		2		3
$var f$	2	↘	$-0,5$	↗	3	↘	$-3,5$	↗	$-1,5$

6. Lorsque *x* varie dans $[-4\ ;\ 3]$, $f(x)$ varie dans l'intervalle $[-3,5\ ;\ 3]$.

7. Graphiquement l'équation $f(x)=0$ possède trois solutions dans $[-4\ ;\ 3]$:

$x=-3,5$, $x=-2,75$ et $x=0,5$.

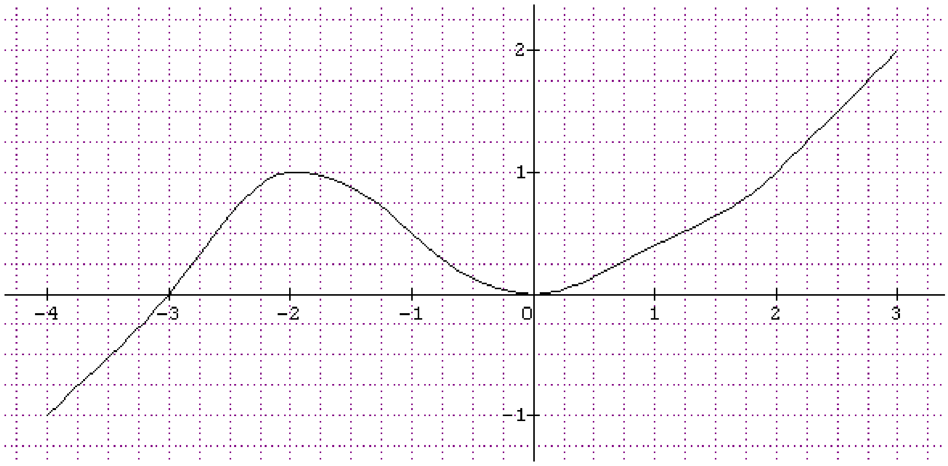
8. a) Graphiquement, $f(x)$ est positif pour $x\in[-4\ ;-3,5]\cup[-2,75\ ;\ 0,5]$.

b) On en déduit le signe de $f(x)$ lorsque *x* varie dans $[-4\ ;\ 3]$:

x	-4		$-3,5$		$-2,75$		$0,5$		3
$signe f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

★ Exercice 1.7

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4\ ;\ 3]$.



Résoudre graphiquement les équations :

1. $f(x)=2$ **2.** $f(x)=1$ **3.** $f(x)=0$ **4.** $f(x)=-1$ **5.** $f(x)=-2$

Correction :

Graphiquement :

1. L'équation $f(x)=2$ possède une solution : $x=3$.

2. L'équation $f(x)=1$ possède deux solutions : $x=-2$ et $x=2$.

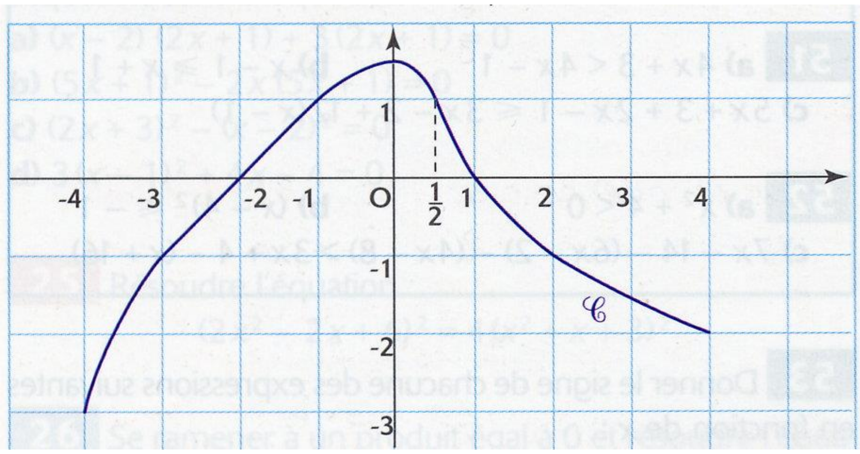
3. L'équation $f(x)=0$ possède deux solutions : $x=-3$ et $x=0$.

4. L'équation $f(x)=-1$ possède une solution : $x=-4$.

5. L'équation $f(x)=-2$ ne possède pas de solution.

★ **Exercice 1.8**

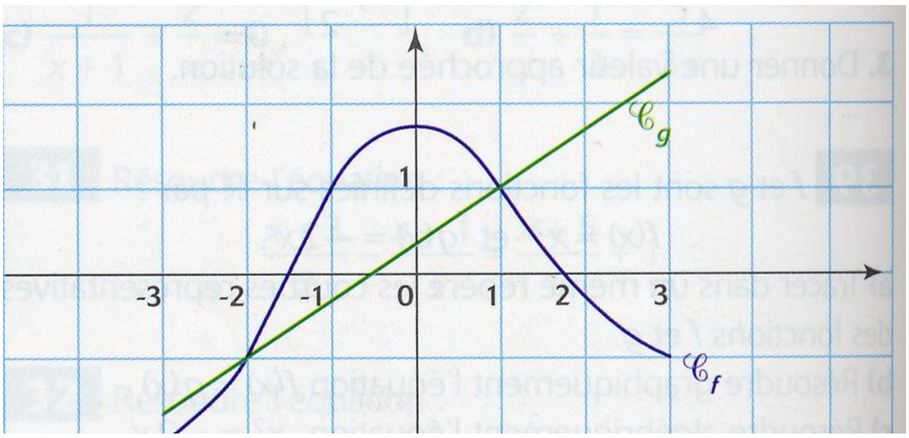
1. La courbe C ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4\ ;\ 4]$.



Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) > 0$ **b)** $f(x) \leq -1$

2. On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $[-3\ ;\ 3]$.



Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) \geq g(x)$ **b)** $f(x) < g(x)$

Correction :

Graphiquement :

1. a) $f(x) > 0$ pour $x \in]-2\ ;1[$ **b)** $f(x) \leq -1$ pour $x \in [-4\ ;-3] \cup [2\ ;\ 4]$

2. a) $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [-2\ ;\ 1]$ **b)** $f(x) < g(x)$ pour $x \in [-3\ ;-2[\cup]1\ ;\ 3]$

Calculs d'images et d'antécédents

★ Exercice 1.9

1. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x - 3$.

a) Calculer : $f(-3)$ et $f\left(-\frac{7}{5}\right)$.

b) Calculer les antécédents par *f* des nombres 1 ; $\frac{3}{4}$.

2. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-2x)^2 - 8$.

a) Quelle est l'image de $-\frac{1}{2}$?

b) Quels nombres ont pour image 1 ?

3. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Quelle est l'image de – 1 ?

La recherche, par le calcul, d'antécédent(s) conduit à résoudre une équation.

Correction :

1. a) $f(x) = -2x - 3$.

On remplace *x* par -3 : $f(-3) = -2\times(-3) - 3 = 6 - 3 = 3$.

On remplace *x* par $-\frac{7}{5}$: $f\left(-\frac{7}{5}\right) = -2\times\left(-\frac{7}{5}\right) - 3 = \frac{14}{5} - 3 = \frac{14}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{1}{5}$.

b) On doit résoudre l'équation : $f(x) = 1$,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow && -2x - 3 = 1 \\
&\Leftrightarrow && -2x = 1 + 3 \\
&\Leftrightarrow && -2x = 4 \\
&\Leftrightarrow && x = \frac{4}{-2} = -2
\end{aligned}$$

1 possède un seul antécédent par *f* : $x = -2$.

On doit résoudre l'équation : $f(x) = \dfrac{3}{4}$,

$$\Leftrightarrow \quad -2x - 3 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x = \frac{3}{4} + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x = \frac{3}{4} + \frac{12}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x = \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\frac{15}{4}}{-2} = \frac{15}{4} \times \frac{1}{-2} = -\frac{15}{8}.$$

$\dfrac{3}{4}$ possède un seul antécédent par *f* : $x = -\dfrac{15}{8}$.

2. $f(x) = (4-2x)^2 - 8$

a) On demande de calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(4 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 - 8 = (4+1)^2 - 8 = 5^2 - 8 = 25 - 8 = 17.$$

b) Il s'agit de résoudre : $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad (4-2x)^2 - 8 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (4-2x)^2 = 1 + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad (4-2x)^2 = 9$$

Or $\square^2 = a > 0 \Leftrightarrow \square = \sqrt{a}$ ou $\square = -\sqrt{a}$.

On en déduit : $4 - 2x = \sqrt{9}$ ou $4 - 2x = -\sqrt{9}$.

$$\Leftrightarrow \quad 4-2x = 3 \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad 4-2x = -3$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x = 3-4 \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad -2x = -3-4$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x = -1 \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad -2x = -7$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1}{-2} \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-7}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2}$$

1 possède deux antécédents par *f* : $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{7}{2}$.

3. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, donc $f(-1) = \dfrac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1-1+1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1}} = \dfrac{-2}{1} = -2$.

★ Exercice 1.10

On considère la fonction définie sur $[-2\ ;\ 3]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 1$.

Par calcul mental ou par calcul posé, recopier et compléter le tableau suivant :

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

Correction :

x	–2	–1	0	1	2	3
y	9	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$

<u>Détail des calculs :</u>

$f(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^3 + (-2)^2 + 1 = -\frac{1}{2}\times(-8) + 4 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$.

$f(-1) = -\frac{1}{2}(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -\frac{1}{2}\times(-1) + 1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$.

$f(0) = -\frac{1}{2}\times 0^3 + 0^2 + 1 = -0 + 0 + 1 = 1$.

$f(1) = -\frac{1}{2}\times 1^3 + 1^2 + 1 = -\frac{1}{2}\times 1 + 1 + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$.

$f(2) = -\frac{1}{2}\times 2^3 + 2^2 + 1 = -\frac{1}{2}\times 8 + 4 + 1 = -4 + 4 + 1 = 1$.

$f(3) = -\frac{1}{2}\times 3^3 + 3^2 + 1 = -\frac{1}{2}\times 27 + 9 + 1 = -\frac{27}{2} + \frac{18}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{7}{2}$.

★ Exercice 1.11

On considère la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

1. **Par calcul mental ou par calcul posé**, recopier et compléter le tableau suivant :

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y									

2. Représenter graphiquement la fonction *f* sur papier millimétré.

E.C.P.1 – Jean PERRIN

Correction :

1.

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	–3	$\frac{5}{8}$	2	$\frac{15}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{11}{8}$	5

<u>Détail des calculs :</u>

$f(-2)=(-2)^3-2\times(-2)+1=-8+4+1=-3$.

$f(-1,5)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^3-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-\frac{27}{8}+3+1=-\frac{27}{8}+\frac{24}{8}+\frac{8}{8}=\frac{5}{8}$.

$f(-1)=(-1)^3-2\times(-1)+1=-1+2+1=2$.

$f(-0,5)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{1}{8}+1+1=-\frac{1}{8}+\frac{8}{8}+\frac{8}{8}=\frac{15}{8}$.

$f(0)=(0)^3-2\times0+1=0-0+1=1$.

$f(0,5)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{8}-1+1=\frac{1}{8}$.

$f(1)=(1)^3-2\times1+1=1-2+1=0$.

$f(1,5)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\times\left(\frac{3}{2}\right)+1=\frac{27}{8}-3+1=\frac{27}{8}-\frac{24}{8}+\frac{8}{8}=\frac{11}{8}$.

$f(2)=(2)^3-2\times2+1=8-4+1=5$.

2.

★ **Exercice 1.12**

Soient la fonction *f* définie sur $[-1\,;\,2]$ par $f(x)=-2(x-1)^2$, et C la courbe associée.

Soient la fonction *g* définie sur $[-1\,;\,2]$ par $g(x)=4x^3-6x^2+2$, et C' la courbe associée.

1. On donne (ou on rappelle) que $0,5^2=0,25$ et que $0,5^3=0,125$.

Par calcul mental ou par calcul posé, recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$							
$g(x)$							

2. Donner deux points d'intersections de C et C'.

3. Tracer C et C'.

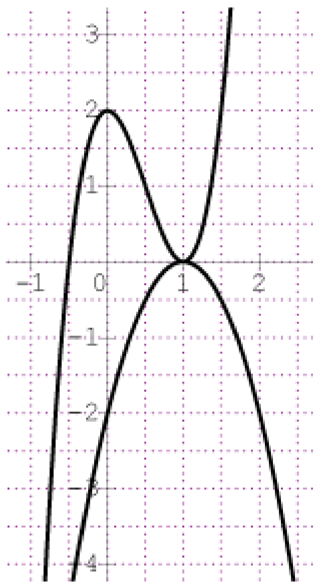
Correction :

1.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	–8	–4,5	–2	–0,5	0	–0,5	–2
$g(x)$	–8	0	2	1	0	2	10

2. D'après le tableau précédent, $(-1\,;-8)$ et $(1;0)$ sont deux points d'intersection.

3.



★ Exercice 1.13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x+1$.

1. Calculer $f(x)+1$.

2. Calculer $f(x+1)$.

Correction :

1. $f(x)=-3x+1$, donc $f(x)+1=-3x+1+1=-3x+2$

2. On remplace « x » par « $x+1$ » : $f(x+1)=-3(x+1)+1=-3x-3+1=-3x-2$.

★ Exercice 1.14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-5x+1$.

1. Calculer $f(2a)$.

2. Calculer $f(3b-1)$.

Correction :

1. On remplace « x » par « $2a$ » :

$f(2a)=3\times(2a)^2-5\times(2a)+1=3\times 4a^2-10a+1=12a^2-10a+1$.

2. On remplace « x » par « $3b-1$ » :

$f(3b-1)=3\times(3b-1)^2-5\times(3b-1)+1$.

Rappels : $k(a+b)=k\times a+k\times b$ et $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

On en déduit : $(3b-1)^2=9b^2-6b+1$ et $-5\times(3b-1)=-15b+5$. Il vient :

$f(3b-1)=3\times\left(9b^2-6b+1\right)-15b+5+1=27b^2-18b+3-15b+5+1=27b^2-33b+9$.

Fonctions affines

★ Exercice 1.15

Déterminer les racines des fonctions affines suivantes :

1. $f(x)=x-2$ **2.** $f(x)=2x+1$ **3.** $f(x)=3x-2$

4. $f(x)=-4x+1$ **5.** $f(x)=-3x-5$ **6.** $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

Correction :

Dans cet exercice, il s'agit de trouver les antécédents de 0, c'est-à-dire qu'il s'agit de résoudre l'équation $f(x)=0$.

1.

$$\begin{aligned} & f(x)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & x-2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & x=2 \end{aligned}$$

2 est racine de *f*.

2.

$$\begin{aligned} & f(x)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x+1=0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x=-1 \\ \Leftrightarrow\quad & x=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{2}$ est racine de *f*.

3.

$$\begin{aligned} & f(x)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x-2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x=2 \\ \Leftrightarrow\quad & x=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\frac{2}{3}$ est racine de *f*.

4.

$$\begin{aligned} & f(x)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & -4x+1=0 \\ \Leftrightarrow\quad & -4x=-1 \\ \Leftrightarrow\quad & x=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\frac{1}{4}$ est racine de *f*.

5.

$$
\begin{aligned}
& f(x)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & -3x-5=0 \\
\Leftrightarrow\quad & -3x=5 \\
\Leftrightarrow\quad & x=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

$-\frac{5}{3}$ est racine de *f*.

6.

$$
\begin{aligned}
& f(x)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{2}x=-\frac{2}{3} \\
\Leftrightarrow\quad & x=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{2}{1}\right)=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$\frac{4}{3}$ est racine de *f*.

★ Exercice 1.16

Déterminer les variations des fonctions de l'exercice 15.

Correction :

Soit $f(x)=ax+b$. Si $a>0$ alors *f* est croissante sur $\mathbb{R}$ et si $a<0$ alors *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

1. $a=1>0$: *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$var\,f$	↗

2. $a=2>0$: *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$var\,f$	↗

3. $a = 3 > 0$: *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$var f$	$\nearrow$

4. $a = -4 < 0$: *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$var f$	$\searrow$

5. $a = -3 < 0$: *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$var f$	$\searrow$

6. $a = -\dfrac{1}{2} < 0$: *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$var f$	$\searrow$

★ Exercice 1.17

Déterminer le signe de chacune des fonctions de l'exercice 15.

Correction :

Pour déterminer le signe de $f(x) = ax + b$, on résout l'inéquation $ax + b \geq 0$ pour savoir pour quelles valeurs de *x*, $ax + b$ est positif. $ax + b$ est négatif ailleurs.

1.
$$\begin{aligned} & f(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq 2 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à droite</u> de 2, <u>après</u> 2)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$signe f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -\dfrac{1}{2}$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à droite</u> de $-\dfrac{1}{2}$, <u>après</u> $-\dfrac{1}{2}$)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$signe f(x)$	$-$	0	$+$

3. $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x \geq 2$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{2}{3}$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à droite</u> de $\dfrac{2}{3}$, <u>après</u> $\dfrac{2}{3}$)

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$signe f(x)$	$-$	0	$+$

4. $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad -4x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad -4x \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{1}{4}$ (on a changé le sens car on a divisé par -4)

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à gauche</u> de $\dfrac{1}{4}$, <u>avant</u> $\dfrac{1}{4}$)

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$signe f(x)$	$+$	0	$-$

5.
$$f(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x - 5 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x \geq 5$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{5}{3} \text{ (on a changé le sens car on a divisé par } -3\text{)}$$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à gauche</u> de $-\frac{5}{3}$, <u>avant</u> $-\frac{5}{3}$)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$signe f(x)$		$+$	0	$-$	

6.
$$f(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x \geq -\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} \text{ (on a changé le sens car on a divisé par } -\frac{1}{2}\text{)}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{3}$$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à gauche</u> de $\frac{4}{3}$, <u>avant</u> $\frac{4}{3}$)

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$signe f(x)$		$+$	0	$-$	

★ **Exercice 1.18**

On considère la fonction affine *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=2x+3$.

1. Établir le sens de variation de *f*.

2. Dresser le tableau de signe de *f*.

3. Construire la représentation graphique de la fonction *f* dans le repère (unité : le cm).

Correction :

1. $a=2>0$: *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

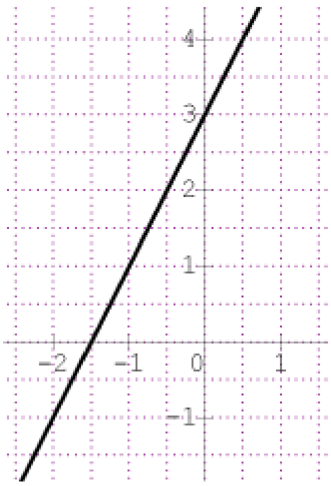
x	$-\infty$ $+\infty$
$var f$	$\nearrow$

2.
$$f\left(x\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x+3\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x\geq -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x\geq -\frac{3}{2}$$

On en déduit le signe de $f\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$signe f(x)$	$-$	0	$+$

3.



Études de signe

★ Exercice 1.19

1. Étudier le signe de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$.

2. Étudier le signe de la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$.

3. En déduire le signe du produit $(3x-1)(2x+1)$.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} & f(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x \geq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$signe f(x)$		$-$	0	$+$	

2.

$$\begin{aligned} & g(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x \geq -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on met « + » <u>à droite</u> de $-\frac{1}{2}$, <u>après</u> $-\frac{1}{2}$)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$signe g(x)$		$-$	0	$+$	

3.

Pour étudier le signe d'un produit de facteurs ou d'un quotient, on étudie le signe de chacun des facteurs et on regroupe tous les résultats dans un seul tableau de signe en appliquant la règle des signes par colonne.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(3x-1)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

★ **Exercice 1.20**

1. Étudier le signe du produit $(2x+3)(2-3x)$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $(2x+3)(2-3x)<0$.

➢ Notion de réunion d'intervalles.

Correction :

1. On étudie le signe de chacun des facteurs et on regroupe les informations dans un grand tableau de signes.

$$\begin{array}{llcll} & 2x+3\geq 0 & & & 2-3x\geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2x\geq -3 & & \Leftrightarrow & -3x\geq -2 \\ \Leftrightarrow & x\geq -\dfrac{3}{2} & & \Leftrightarrow & x\leq \dfrac{2}{3} \end{array}$$

On en déduit le signe de $(2x+3)(2-3x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+3)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. D'après le tableau de signes précédent, $(2x+3)(2-3x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

★ Exercice 1.21

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 + 13x - 5$.

1. Développer le produit $(3x-1)(2x+5)$.

2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

➢ Notion de développement d'une expression algébrique.

Correction :

1. $(3x-1)(2x+5) = 3x \times 2x + 3x \times 5 - 1 \times 2x - 1 \times 5 = 6x^2 + 15x - 2x - 5 = 6x^2 + 13x - 5 = f(x)$.

2. Nous avons donc <u>deux</u> expressions de $f(x)$.

Pour déterminer le signe de $f(x)$, nous allons utiliser <u>la forme factorisée</u>.

$$\begin{array}{llcll} & 3x-1 \geq 0 & \qquad & & 2x+5 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3x \geq 1 & & \Leftrightarrow & 2x \geq -5 \\ \Leftrightarrow & x \geq \dfrac{1}{3} & & \Leftrightarrow & x \geq -\dfrac{5}{2} \end{array}$$

On en déduit le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x+3)(2-3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

★ Exercice 1.22

1. Étudier le signe du quotient $\dfrac{9-4x}{11-5x}$.

2. a) Étudier le signe du quotient $\dfrac{2x+3}{2-x}$.

b) En déduire les solutions de l'inéquation $\dfrac{2x+3}{2-x} \leq 0$.

E.C.P.1 – Jean PERRIN

Correction :

Dans le cas d'un quotient, on procède comme pour un produit en ajoutant une double barre pour les valeurs interdites, c'est-à-dire celles qui annulent le dénominateur.

1. $9-4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -9 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{9}{4}$

$11-5x \geq 0 \Leftrightarrow -5x \geq -11 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{11}{5}$

Remarque : $\dfrac{9}{4} = 2,25$ et $\dfrac{11}{5} = 2,2$ donc $\dfrac{11}{5}$ se place avant $\dfrac{9}{4}$.

On en déduit le signe de $\dfrac{9-4x}{11-5x}$:

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$9-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$11-5x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$\frac{9-4x}{11-5x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

2. a) $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$

$2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$

On en déduit le signe de $\dfrac{2x+3}{2-x}$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{2x+3}{2-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

b) D'après le tableau de signes précédent, $\dfrac{2x+3}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left]2\,;+\infty\right[$.

Résolution d'équations et d'inéquations

★ Exercice 1.23

Résoudre les équations suivantes :

1. $x+7=19$ **2.** $x-5=-2$ **3.** $0,3x=6$ **4.** $-2x=6$

5. $\dfrac{x}{9}=8$ **6.** $3x+4=12$ **7.** $\dfrac{4x-5}{x+4}=2$ **8.** $\dfrac{3}{4}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}$

9. $2(3x-1)-5(x-6)=2$ **10.** $(x+3)^2+5x-2=x^2-1$

11. $(x+1)(x+2)=0$ **12.** $(2x+1)(4x-3)=0$ **13.** $\dfrac{x+4}{x-1}=0$

14. $\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{5}{4}$ **15.** $x+3=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Correction :

1. $x+7=19 \Leftrightarrow x=19-7 \Leftrightarrow x=12$.

2. $x-5=-2 \Leftrightarrow x=-2+5 \Leftrightarrow x=3$.

3. $0,3x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{0,3} \Leftrightarrow x=\dfrac{60}{3} \Leftrightarrow x=20$.

4. $-2x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{-2}=-3$.

5. $\dfrac{x}{9}=8 \Leftrightarrow x=8\times 9=72$.

6. $3x+4=12 \Leftrightarrow 3x=12-4 \Leftrightarrow 3x=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$.

L'exercice 7 est basé sur la propriété : $\dfrac{A}{B}=C \Leftrightarrow A=C\times B$.

7. $\dfrac{4x-5}{x+4}=2 \Leftrightarrow 4x-5=2(x+4) \Leftrightarrow 4x-5=2x+8 \Leftrightarrow 4x-2x=8+5 \Leftrightarrow 2x=13 \Leftrightarrow x=\dfrac{13}{2}$.

8. $\dfrac{3}{4}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{4}x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{1}=\dfrac{4}{3}$.

9. $2(3x-1)-5(x-6)=2 \Leftrightarrow 6x-2-5x+30=2 \Leftrightarrow 6x-5x=2+2-30 \Leftrightarrow x=-26$.

10.
$$\begin{aligned}
& (x+3)^2+5x-2=x^2-1,\\
\Leftrightarrow\quad & x^2+6x+9+5x-2=x^2-1,\\
\Leftrightarrow\quad & x^2-x^2+6x+5x=-1-9+2,\\
\Leftrightarrow\quad & 11x=-8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{11}.
\end{aligned}$$

Les exercices 11 et 12 reposent sur le théorème du produit nul : un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un des facteurs est nul.
Concrètement : $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$.

11. $(x+1)(x+2)=0$,

$\Leftrightarrow \quad x+1=0 \quad$ ou $\quad x+2=0$,

$\Leftrightarrow \quad x=-1 \quad$ ou $\quad x=-2$.

L'équation produit possède deux solutions : -1 et -2.

12. $(2x+1)(4x-3)=0$,

$\Leftrightarrow \quad 2x+1=0 \quad$ ou $\quad 4x-3=0$,

$\Leftrightarrow \quad 2x=-1 \quad$ ou $\quad 4x=3$,

$\Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{1}{2} \quad$ ou $\quad x=\dfrac{3}{4}$.

L'équation produit possède deux solutions : $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$.

L'exercice 13 est basé sur la propriété : $\dfrac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$.

13. $\dfrac{x+4}{x-1}=0 \Leftrightarrow x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.

L'exercice 14 est basé sur la propriété : $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D} \Leftrightarrow A\times D=B\times C$ avec $B\neq 0$ et $D\neq 0$.

14. $\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 4(2x-1)=5(x+3) \Leftrightarrow 8x-4=5x+15$,

$\Leftrightarrow \quad 8x-5x=15+4 \Leftrightarrow 3x=19 \Leftrightarrow x=\dfrac{19}{3}$.

15. $x+3=\dfrac{2x-1}{x-1} \Leftrightarrow (x+3)(x-1)=2x-1 \Leftrightarrow x^2-x+3x-3=2x-1$

$\Leftrightarrow \quad x^2-x+3x-2x-3+1=0 \Leftrightarrow x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$.

★ Exercice 1.24

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-2x+3\geq 0$ **2.** $4x-5\leq 2x+2$ **3.** $8(3x-5)-5(2x-8)\leq 4(3x-1)+16$

4. $1-\dfrac{-3x+1}{3}\leq\dfrac{4x-1}{2}-7$ **5.** $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1}\leq 0$ **6.** $\dfrac{x+4}{5-x}<2$

Correction :

1. $-2x+3\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geq -3 \Leftrightarrow x\leq\dfrac{3}{2}$.

$\mathcal{S}=\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

2. $4x-5\leq 2x+2 \Leftrightarrow 4x-2x\leq 2+5 \Leftrightarrow 2x\leq 7 \Leftrightarrow x\leq\dfrac{7}{2}$.

$\mathcal{S}=\left]-\infty\ ;\ \dfrac{7}{2}\right]$.

3.

$$\begin{aligned}
& 8(3x-5)-5(2x-8)\leq 4(3x-1)+16,\\
\Leftrightarrow\quad & 24x-40-10x+40\leq 12x-4+16,\\
\Leftrightarrow\quad & 14x\leq 12x+12,\\
\Leftrightarrow\quad & 14x-12x\leq 12,\\
\Leftrightarrow\quad & 2x\leq 12,\\
\Leftrightarrow\quad & x\leq 6.
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\left]-\infty\ ;\ 6\right]$.

4.

$$\begin{aligned}
& 1-\frac{-3x+1}{3}\leq\frac{4x-1}{2}-7,\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3}{3}-\frac{-3x+1}{3}\leq\frac{4x-1}{2}-\frac{14}{2},\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3-(-3x+1)}{3}\leq\frac{4x-1-14}{2},\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3+3x-1}{3}\leq\frac{4x-1-14}{2},\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3x+2}{3}\leq\frac{4x-15}{2},\\
\Leftrightarrow\quad & 2(3x+2)\leq 3(4x-15)\Leftrightarrow 6x+4\leq 12x-45\Leftrightarrow 6x-12x\leq -45-4,\\
\Leftrightarrow\quad & -6x\leq -49\Leftrightarrow x\geq\frac{49}{6}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\left[\dfrac{49}{6}\ ;+\infty\right[$.

5. Pour résoudre $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1} \leq 0$, on détermine le signe de $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1}$ qui est composé de trois facteurs : $5x$, $x-2$ et $4x+1$.

Étudions le signe de chacun des trois facteurs :

$5x \geq 0$	$x-2 \geq 0$	$4x+1 \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad x \geq 0$	$\Leftrightarrow \quad x \geq 2$	$\Leftrightarrow \quad 4x \geq -1$
		$\Leftrightarrow \quad x \geq -\dfrac{1}{4}$

Regroupons toutes les informations dans un grand tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		2		$+\infty$
$5x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{5x(x-2)}{4x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes précédent, $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,; -\dfrac{1}{4}\right[\cup [0\,;\,2]$.

6. $\dfrac{x+4}{5-x} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{5-x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4-2(5-x)}{5-x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4-10+2x}{5-x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-6}{5-x} < 0$.

Pour résoudre $\dfrac{3x-6}{5-x} < 0$, on détermine le signe de $\dfrac{3x-6}{5-x}$ qui est composé de deux facteurs : $3x-6$ et $5-x$.

Étudions le signe de chacun des deux facteurs :

$3x-6 \geq 0$	$5-x \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad 3x \geq 6$	$\Leftrightarrow \quad -x \geq -5$
$\Leftrightarrow \quad x \geq 2$	$\Leftrightarrow \quad x \leq 5$

Regroupons toutes les informations dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$3x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{3x-6}{5-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

D'après le tableau de signes, $\dfrac{3x-6}{5-x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,2[\cup]5\,;+\infty[$.