

DS 1 Mathématiques

E.C.P. 1

Correction

Exercice 1

1. Graphiquement, $f(2,5) = 0$ et $f(-1) = 1,5$.
2. Lorsque x varie dans l'intervalle $[-1,5 ; 1,5]$, $f(x)$ varie dans l'intervalle $[0 ; 4]$.
3. a) Graphiquement, l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions : $x = 0$ et $x = 2,5$.
b) Graphiquement, les antécédents de 1,5 sont -1 , 1 et 2 .
4. Graphiquement :

x	-2	0	2,5	3
Signe de $f(x)$	+	0	+	-

5. Graphiquement, le maximum de f sur l'intervalle $[-1 ; 2]$ est 2. Il est atteint pour $x = 1,5$.
6. Graphiquement :

x	-2	0	1,5	3
Variations de f	8	0	2	-4,5

Exercice 2

1. $f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow 3x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow 3x = 4$
 $\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

La fonction f s'annule pour $x = \frac{4}{3}$.

2. $a = 3 > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

$$3. \quad f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

On en déduit le signe de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 3

$$1. \quad f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

La fonction f s'annule pour $x = \frac{2}{3}$.

2. $a = -3 < 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$3. \quad f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{-3}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

On en déduit le signe de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 2x-3 \geq 0 & 3x+2 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & 2x \geq 3 & \Leftrightarrow 3x \geq -2 \\
 \Leftrightarrow & x \geq \frac{3}{2} & \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $(2x-3)(3x+2)$:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	-	-	0	+
$3x+2$	-	0	+	+
$(2x-3)(3x+2)$	+	0	-	+

$$\begin{aligned}
 2. \quad & -2x-3 \geq 0 & 1-2x \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & -2x \geq 3 & \Leftrightarrow -2x \geq -1 \\
 \Leftrightarrow & x \leq -\frac{3}{2} & \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $(-2x-3)(1-2x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x-3$	+	0	-	-
$1-2x$	+	+	0	-
$(-2x-3)(1-2x)$	+	0	-	+

Exercice 5

1. Il existe un chat qui n'est pas gris (ou : au moins un chat n'est pas gris)
2. Aucune boule n'est blanche.

Exercice 6

1. Si je suis habillé en bleu, alors je suis heureux
2. Si je ne suis pas habillé en bleu, alors je ne suis pas heureux

Exercice 7

L'énoncé concerne :

- 1) les garçons qui font de l'espagnol (par proposition directe)
- 2) ceux qui n'habitent pas Marseille (par contraposée)
1. François ne fait pas de l'espagnol (par contraposée)
2. On ne sait pas (l'énoncé parle des garçons qui font espagnol, pas des filles)
3. Dominique est une fille (autrement Dominique habiterait Marseille)
4. On ne sait pas (on n'a pas d'information sur ceux qui habitent Marseille)

Exercice 8

1. $u_0 = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 5 = 5$ et $u_2 = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 5 = 3 \times 4 - 4 + 5 = 13$.

2. $v_1 = 2v_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$,
 $v_2 = 2v_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$ et
 $v_3 = 2v_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 14 + 1 = 15$.

3. $w_1 = 3w_0 - 0 - 2 = 3 \times 1 - 0 - 2 = 1$,
 $w_2 = 3w_1 - 1 - 2 = 3 \times 1 - 1 - 2 = 0$ et
 $w_3 = 3w_2 - 2 - 2 = 3 \times 0 - 2 - 2 = -4$.

Exercice 9

1. a) (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $a = -2$.

b) On en déduit : $u_n = an + u_0 = -2n + 3$ puis $u_9 = -2 \times 9 + 3 = -15$.

c) Par cours, $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$, donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \frac{3 - 15}{2} = 10 \times \frac{-12}{2} = 10 \times (-6) = -60.$$

2. $v_n = a(n-1) + v_1 = -3(n-1) + 4 = -3n + 3 + 4 = -3n + 7$.

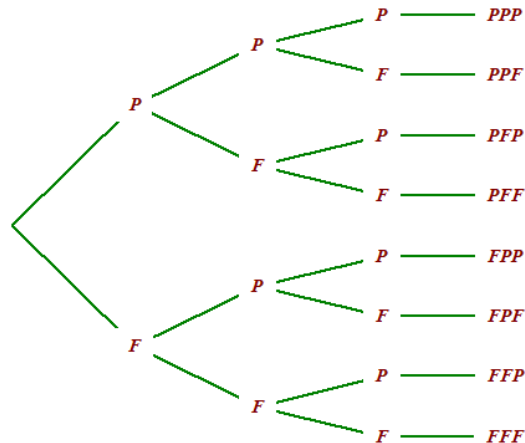
3. Par cours, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 10 \times 21 = 210$.

Exercice 10

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,6 - 0,7 = 0,1.$$

Exercice 11

1.



2. Il y a huit issues possibles.

3. a) Il y a trois cas favorables : FPP, PFP et PPF. La probabilité de l'événement « On a obtenu exactement une fois Face lors de ces trois lancers » est : $P(A) = \frac{3}{8}$.

b) Il y a quatre cas favorables : PPF, FPP, PFP et PPP. La probabilité de l'événement B : « On a obtenu au moins deux fois Pile lors de ces trois lancers » est : $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Exercice 12

1. Il y a 25 issues possibles.

Boule 2 \ Boule 1	1	2	3	4	5
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5

2. Il y a 4 cas favorables : 2-5, 3-4, 4-3, 5-2. La probabilité de cet événement est $4 / 25$.

3. Il y a 16 cas favorables (en gras dans le tableau). La probabilité de cet événement est $16 / 25$.

Exercice 13

1. $a=1, b=3, c=-10$. $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$.

Il y a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ et

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

$x^2 + 3x - 10$ est du signe de 1 à l'extérieur des racines. On en déduit :

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
Signe de $x^2 + 3x - 10$	+	0	-	+

La factorisation est, ici, $a(x - x_1)(x - x_2)$. Donc $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

2. $a=-1, b=6, c=-9$. $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 36 - 36 = 0$.

Il y a une racine : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$.

$-x^2 + 6x - 9$ est du signe de -1 . On en déduit :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $-x^2 + 6x - 9$	-	0	-

La factorisation est, ici, $a(x - x_0)^2$. Donc $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2$.

3. Déterminer le signe de $x^2 + x + 1$.

$a=1, b=1, c=1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$.

$x^2 + x + 1$ est du signe de 1, donc positif, sur $]-\infty ; +\infty[$.