DS 2 Mathématiques – Concours blanc – Sujet 2

Exercice 1

1. **a)** $-3+1=-2$ **b)** $-4-2+3=-3$ **c)** $2-2\times(-5)=2+10=12$

2. **a)** $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\times 2}{3\times 2}+\dfrac{1\times 3}{2\times 3}=\dfrac{4}{6}+\dfrac{3}{6}=\dfrac{7}{6}$ **b)** $\dfrac{3\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{9}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{5}{12}$

c) $\dfrac{8}{9}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{8\times 3}{9\times 4}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{\cancel{12}\times 2}{\cancel{12}\times 3}=\dfrac{2}{3}$ **d)** $\dfrac{3}{10}\div\dfrac{6}{5}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}\times 2}\times\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{3}\times 2}=\dfrac{1}{4}$

3. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

4. **a)** $2(3x+1)-3(2x-1)=6x+2-6x+3=5$

b) $(2x+1)(3x-2)=6x^2-4x+3x-2=6x^2-x-2$

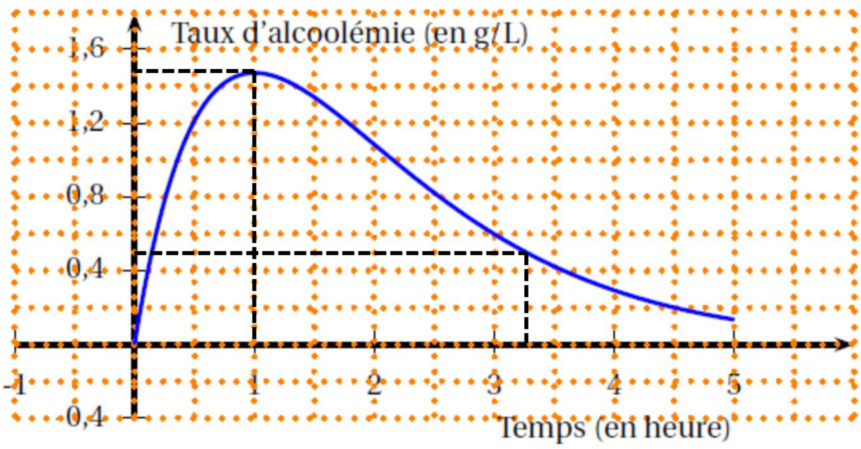
c) $(2x-3)^2=4x^2-12x+9$ (identité remarquable)

5. **a)** $3x^2+15x=3x(x+5)$

b) $x^2-49=(x-7)(x+7)$

c) $x^2+4x+4=(x+2)^2$ (identité remarquable)

Exercice 2



1. Par lecture graphique le taux d'alcoolémie maximal est d'environ **<u>1,45 g/L</u>** atteint au bout d'**<u>1 heure</u>**.

2. Légalement, Bertrand aura la possibilité de reprendre sa voiture au bout de 3h15, c'est-à-dire à **<u>22h45</u>**.

Exercice 3

$$f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x+4=0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x=-4$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$$f(x)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x+4\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x\geq -4$$
$$\Leftrightarrow \quad x\leq \frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

On en déduit le signe de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exercice 4

1. Pour tout *n* : $u_n=4^n-3^n$.

$u_0=4^0-3^0=1-1=\underline{\mathbf{0}}$ (on a remplacé *n* par 0).

$u_2=4^2-3^2=16-9=\underline{\mathbf{7}}$ (on a remplacé *n* par 2).

2. Pour tout *n* : $v_{n+1}=2v_n-3$ avec $v_0=5$.

$v_1=2v_0-3=2\times 5-3=10-3=\underline{\mathbf{7}}$ (on a remplacé *n* par 0).

$v_2=2v_1-3=2\times 7-3=14-3=\underline{\mathbf{11}}$ (on a remplacé *n* par 1).

3. Pour tout *n* : $w_{n+1}=\frac{1}{3}w_n+n-2$ avec $w_0=1$.

$w_1=1/3\times w_0+0-2=1/3\times 1-2=\underline{\mathbf{-5/3}}$ (on a remplacé *n* par 0).

$w_2=1/3\times w_1+1-2=1/3\times(-5/3)-1=-5/9-1=\underline{\mathbf{-14/9}}$ (ici, $n=1$).

4. On a : $u_1=\sqrt{2u_0}=\sqrt{1}=\underline{\mathbf{1}}$ puis $u_2=\sqrt{2u_1}=\sqrt{2}$

5. Pour tout *n* : $u_{n+3}=2u_{n+2}-u_{n+1}+u_n$ avec $u_0=1$, $u_1=-1$, $u_2=0$.

$u_3=2u_2-u_1+u_0=2\times 0-(-1)+1=\underline{\mathbf{2}}$ (on a remplacé *n* par 0).

$u_4=2u_3-u_2+u_1=2\times 2-0+(-1)=4-1=\underline{\mathbf{3}}$ (on a remplacé *n* par 1).

Exercice 5

1. Il y a 6 jetons numéro 1 parmi les 21 jetons que contient le sac.

La probabilité de piocher un jeton numéro 1 est donc $\frac{6}{21}=\frac{3\times 2}{3\times 7}=\underline{\mathbf{\frac{2}{7}}}$.

2. Avec cette organisation :

- si le 1 sort, on perd deux euros (gain de 1 € et perte de la mise de 3 €)
- si le 2 sort, on perd un euro (gain de 2 € et perte de la mise de 3 €)
- si le 3 sort, on ne gagne rien (gain de 3 € et perte de la mise de 3 €)
- si le 4 sort, on gagne un euro (gain de 4 € et perte de la mise de 3 €)
- si le 5 sort, on gagne deux euros (gain de 5 € et perte de la mise de 3 €)
- si le 6 sort, on gagne trois euros (gain de 6 € et perte de la mise de 3 €)

Au total, seuls trois jetons permettent de gagner au moins deux euros (les deux jetons numérotés 5 et le jeton numéroté 6).

La probabilité de gagner au moins deux euros est : $\frac{3}{21}=\frac{3\times 1}{3\times 7}=\underline{\mathbf{\frac{1}{7}}}$.

Exercice 6

1. La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison 2.

On a donc, pour tout entier n : $u_n=an+u_0=2n+5$.

Dès lors : $u_{30}=2\times 30+5=\underline{\mathbf{65}}$.

2. La suite (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_1=2$ et de raison –3.

On a donc, pour tout entier n : $v_n=a(n-1)+v_1=(-3)(n-1)+2=-3n+3+2$.

$$\underline{\boldsymbol{v_n=-3n+5}}.$$

3. La raison de la suite arithmétique (w_n) telle que $w_5=1$ et $w_{11}=-17$ est :

$a=\frac{w_{11}-w_5}{11-5}=\frac{-17-1}{11-5}=\frac{-18}{6}=\underline{\mathbf{-3}}$.

4. On rappelle que $1+2+\ ...\ +n=\frac{n(n+1)}{2}$.

On a donc : $1+2+3+\ ...\ +200=\frac{200\times 201}{2}=100\times 201=\underline{\mathbf{20\ 100}}$.

Exercice 7

1. a) 80 clients ont bénéficié des conseils d'un vendeur. Parmi ceux-ci, 60% ont effectué un achat. Le nombre de clients ayant bénéficié de conseils et ayant effectué un achat est donc : $0,6\times80=48$.

b)

	B : ont effectué un achat	N'ont pas effectué d'achat	Total
A : ont bénéficié des conseils d'un vendeur	48	32	80
N'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur	12	8	20
Total	60	40	100

2. a) $P(\mathrm{A})=\dfrac{80}{100}=0,8=80\%$ et $P(\mathrm{B})=\dfrac{60}{100}=0,6=60\%$.

b) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ est l'événement : « le client a bénéficié des conseils d'un vendeur **et** a effectué un achat ». $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ est l'événement : « le client a bénéficié des conseils d'un vendeur **ou** a effectué un achat ».

c) 48 clients ont bénéficié des conseils et ont effectué l'achat : $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{48}{100}=0,48$.

Le nombre de clients ayant bénéficié de conseils ou ayant effectué l'achat est :

$48+32+12=92$. Donc $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\dfrac{92}{100}=0,92$.

3. La probabilité qu'un client ait bénéficié de conseils parmi ceux qui ont effectué un achat est : $P_B(A)=\dfrac{48}{60}=\dfrac{12\times4}{12\times5}=\dfrac{4}{5}$.

Exercice 8

1. a) $a=9$, $b=-6$, $c=1$. $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times9\times1=36-36=0$

Il y a une racine : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{6}{2\times9}=-\dfrac{6}{18}=-\dfrac{1}{3}$

b) La factorisation est, ici, $a(x-x_0)^2$. Donc $9x^2+6x+1=9\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$.

2. $a=1$, $b=3$, $c=-10$. $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-10)=9+40=49>0$

Il y a deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-\sqrt{49}}{2\times1}=\dfrac{-3-7}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5$ et

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+\sqrt{49}}{2\times1}=\dfrac{-3+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

$x^2+3x-10$ est du signe de 1 à l'extérieur des racines. On en déduit :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
Signe de $x^2+3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $a=-1$, $b=-2$, $c=-5$. $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-1)\times(-5)=4-20=-16<0$

$-x^2-2x-5$ est du signe de -1, donc négatif, sur $]-\infty\,;+\infty[$.

4. **a.** $\Delta=(2a)^2-4\times1\times16=4a^2-64$.

b. L'équation possède une seule solution si $\Delta=0$.

$\Delta=0 \Leftrightarrow 4a^2-64=0 \Leftrightarrow a^2=16 \Leftrightarrow a=4$ ou $a=-4$.

Exercice 9

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,2+0,6-0,68=0,12$.

$P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=0,2\times0,6=0,12$. Donc $P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

A et B sont donc indépendants.

De plus, $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq0$, donc A et B ne sont pas incompatibles.

Exercice 10

1. On remplace n par 0 : $x_1=3x_0+y_0-1=3+1-1=\underline{\mathbf{3}}$.

$y_1=-2x_0+4=-2+4=\underline{\mathbf{2}}$.

2. $r_0=x_0+y_0=1+1=\underline{\mathbf{2}}$.

3. $r_{n+1}-r_n=(x_{n+1}+y_{n+1})-(x_n+y_n)=x_{n+1}+y_{n+1}-x_n-y_n$.

$\Leftrightarrow \quad r_{n+1}-r_n=3x_n+y_n-1-2x_n+4-x_n-y_n=\underline{\mathbf{3}}$.

On a donc $r_{n+1}=r_n+3$.

(r_n) est donc la suite arithmétique de premier terme $r_0=2$ et de raison 3.

4. On en déduit que $r_n=an+r_0=\underline{\boldsymbol{3n+2=x_n+y_n}}$.

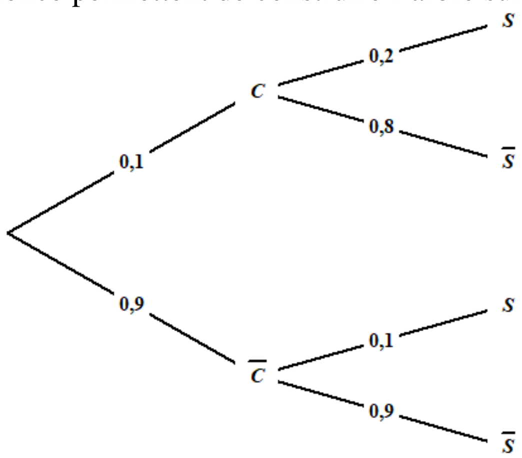
Exercise 11

1. **a)** Lorsque le vêtement n'a pas de défaut de couleur, la probabilité qu'il ait un défaut de forme est 0,1. Donc $P_{\overline{C}}(S) = 0{,}1$.

Lorsque le vêtement a un défaut de couleur, la probabilité qu'il ait aussi un défaut de forme est 0,2. Donc $P_C(S) = 0{,}2$.

La probabilité qu'un vêtement choisi au hasard ait un défaut de couleur est 0,1.
Donc $P(C) = 0{,}1$.

b) Les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre suivant :

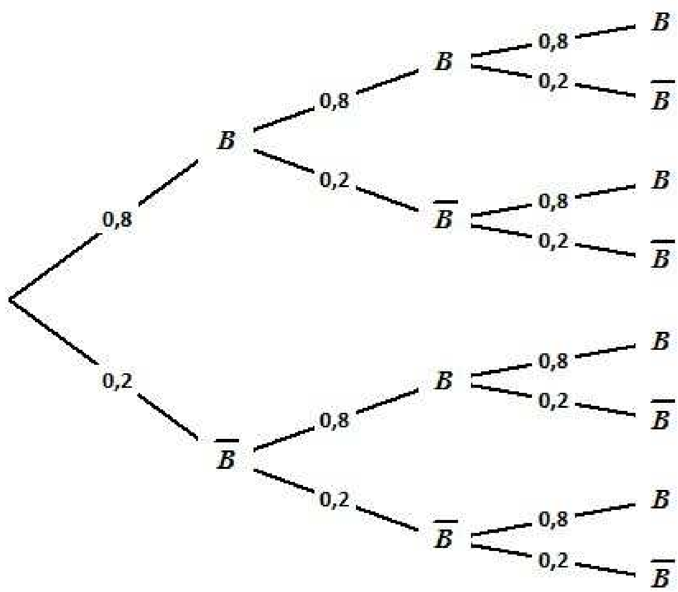


2. **a)** La probabilité que le vêtement ait les deux défauts est :
$P(C \cap S) = P(C) \times P_C(S) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$.

b) C et $\overline{C}$ constituent un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(C) \times P_C(S) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(S) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}02 + 0{,}09 = 0{,}11$.

c) $P(S) \neq P_C(S)$. Les événements S et C ne sont pas indépendants.

3. **a)** Les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre suivant :



b) La probabilité qu'un seul des vêtements soit bleu est :
$0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}032 + 0{,}032 + 0{,}032 = 0{,}096$.