

Test « Étude de fonctions » – Correction

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 3x - 5$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de f et construire le tableau des variations complet de f .

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 3x - 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

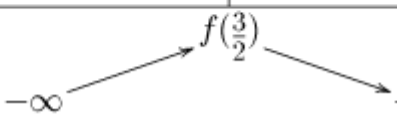
$$2. \quad f'(x) = -2x + 3.$$

$$3. \quad -2x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{3}{2}\right) - 5 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 5 = \frac{-9 + 18 - 20}{4} = -\frac{11}{4}.$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $g'(x)$.
3. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau des variations de g .

On ne demande pas le calcul des images.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$2. g'(x) = -3x^2 + 8x + 3.$$

$$3. a = -3, b = 8 \text{ et } c = 3. \Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 64 + 36 = 100.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times (-3)} = \frac{-8 - 10}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times (-3)} = \frac{-8 + 10}{-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$g'(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

On en déduit les variations de g :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f	$+\infty \rightarrow f(-\frac{1}{3}) \rightarrow f(3) \rightarrow -\infty$				