ECP1

Devoir 12

Exercice 1

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x^2-9x+6$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x^2-9x+6=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x^2-9x+6=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2. $f'(x)=3x^2+6x-9$

$a=3$, $b=6$, $c=-9$. $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times3\times(-9)=36+108=144>0$

Il y a deux racines :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\dfrac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{144}}{2\times3}=\dfrac{-6+12}{6}=1$

$f'(x)$ est du signe de 3 à l'extérieur des racines. On en déduit :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	33	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+6=-27+27+27+6=33$,

et $f(1)=1^3+3\times1^2-9\times1+6=1$.

3. Sur $[-3\,;+\infty[$, 1 est minimum.

Donc l'équation $f(x)=0$ ne possède pas de solution sur $[-3\,;+\infty[$.

- f est continue sur $]-\infty\,;3]$
- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;3]$
- $0\in g(]-\infty\,;3])=]-\infty\,;33]$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α sur $]-\infty\,;3]$.

En définitive, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

4. On en déduit le tableau du signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2

1. On considère la suite géométrique (u_n) de raison 2 et de terme initial $u_0=1$.
Déterminer u_n puis calculer u_4.

2. La suite (a_n) est définie par $a_1=7$ et $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Calculer a_n.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout *n* entier naturel par : $v_n=4\times 3^n$.
Calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?

1. $u_n=u_0\times b^n=1\times 2^n=2^n$. On en déduit : $u_4=2^4=16$.

2. (a_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $a_1=7$.

$$a_n=a_1\times b^{n-1}=7\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

3. $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{4\times 3^{n+1}}{4\times 3^n}=3$. (v_n) est donc la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0=4\times 3^0=4$.