Test « Théorème de la bijection, suites arithmétiques et suites arithmético-géométriques » – Correction

Exercice 1 :

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$var\,f$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Démontrer que l'équation $f(x)=3$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

- *f* est continue sur $]-\infty\ ;\ 1]$.
- *f* est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$.
- $3 \in f\left(]-\infty\ ;\ 1]\right) = [-1, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=3$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$.

Sur $]1\ ;\ +\infty[$, 2 est maximum de *f*. L'équation $f(x)=3$ ne possède donc pas de solution dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=3$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. On considère la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de terme initial $u_0 = 2$.
   Déterminer u_n.
2. La suite (v_n) est définie par : $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 5\,v_n \end{cases}$. Déterminer l'écriture explicite de v_n.

1. $u_n = u_0 \times b^n = 2\times 3^n$.

2. (v_n) est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_1 = 2$. $v_n = 2\times 5^{n-1}$.

Exercice 3 :

On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. Quelle est la nature de cette suite ? Déterminer son point fixe.

2. Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + 3$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3. Déterminer v_n. En déduire l'écriture explicite de u_n.

1. (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

Le point fixe vérifie $x = 2x + 3 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$.

2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 3 + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$.

(v_n) est donc la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 3$.

3. On en déduit : $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 2^n$. Puis : $u_n = v_n - 3 = 3 \times 2^n - 3$.