Raisonnements

I. Langage courant et langage mathématique

« si »
Paroles d'un père à son enfant :
(1) « Si la température dépasse 25° alors tu pourras aller te baigner ». L'enfant aura-t-il la permission de se baigner s'il fait 20° ? s'il fait 28° ?
(2) « Tu pourras aller te baigner si la température dépasse 25°».
Est-ce que les phrases (1) et (2) ont la même signification dans le langage courant ?

➢ Notion de proposition conditionnelle

« et, ou »

1. Sur le menu du restaurant scolaire il est écrit : fromage ou yaourt. Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?

2. Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.

   a) Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?

   b) Les deux phrases suivantes : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse » et « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre et tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

➢ Notion de réunion et d'intersection

« un »
Le mot « un » a plusieurs significations en langage courant comme en mathématiques :

- le nombre qui sous-entend « exactement un » comme dans la phrase « le prix d'un sandwich est deux euros » qui veut dire que « pour deux euros, on n'a effectivement qu'un seul sandwich » ;
- l'article indéfini qui signifie « au moins un » comme dans la phrase « pour la sortie de demain, emporte un sandwich » : il est tout à fait possible d'en emporter plusieurs ;
- l'article indéfini qui signifie « tout » comme dans la phrase « un sandwich est composé de pain et d'autres ingrédients »
- « un parmi d'autres » comme dans la phrase « je cherche un sandwich sans mayonnaise ».

En mathématiques, la bonne interprétation d'un mot est indispensable pour pouvoir interpréter correctement les énoncés.

II. Proposition conditionnelle

1. Voici deux propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $(a+b)^2=0$ $\qquad\qquad$ $\boxed{2}$ $a=0$ et $b=0$

Si a et b sont des nombres réels tels que la proposition $\boxed{2}$ est vraie, alors la proposition $\boxed{1}$ est vraie. On note : pour a et b réels, $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ et on dit que, pour a et b réels la proposition $\boxed{2}$ implique la proposition $\boxed{1}$.

Est-il vrai que pour a et b réels, la proposition $\boxed{1}$ implique la proposition $\boxed{2}$?

2. Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $a^2=b^2$ $\qquad$ $\boxed{2}$ $a=b$ $\qquad$ $\boxed{3}$ $a=-b$

$\boxed{4}$ $(a+b)(a-b)=0$ $\qquad$ $\boxed{5}$ $a=b$ ou $a=-b$ $\qquad$ $\boxed{6}$ $a=0$ ou $b=0$

a) Quelles sont les implications du type $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{..}$, vraies pour a et b réels ?

b) Quelles sont les implications du type $\boxed{..} \Rightarrow \boxed{1}$, vraies pour a et b réels ?

c) Quelles sont les propositions équivalentes pour a et b réels ?

d) Application : résoudre l'équation $(2x-3)^2=(2x+9)^2$.

- Notion d'implication
- Notion de proposition équivalente

★ Exercice 2.1

Dans cet exercice, on considère la proposition conditionnelle (implication) suivante :
"Si je suis anglais, alors je parle l'Anglais"

1. Quelle est la réciproque de cette proposition ?
2. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
3. Chacune des trois propositions formulées est-elle vraie ou fausse ?

★ Exercice 2.2

Dans cet exercice, on considère la proposition conditionnelle suivante :
"Si je suis un bachelier professionnel, alors je suis en CPGE ECP"

1. Quelle est la réciproque de cette proposition ?
2. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
3. Quelle est la contraposée de la réciproque de cette proposition ?
4. Chacune des quatre propositions formulées est-elle vraie ou fausse ?

★ **Exercice 2.3**

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain ?

2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain ?

3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?

4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

- Proposition directe, réciproque, contraposée
- "Vérité" de la proposition réciproque

III. Quantificateur universel, quantificateur existentiel

- L'énoncé : « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-il vrai ?

Ici, il s'agit de faire prendre conscience de la nécessité de ***préciser le contexte de la proposition conditionnelle***, c'est-à-dire l'ensemble auquel appartient x pour pouvoir donner la valeur vraie ou fausse à cet énoncé. En effet, si x est un nombre positif, l'énoncé est vrai, si x est un réel, l'énoncé est faux et un contre-exemple est facilement trouvé.
La nécessité de ce type de précision se retrouve dans la modélisation d'une situation où il est nécessaire de préciser le domaine de définition de la variable.

« Le carré d'un nombre réel est un nombre positif »
Il existe des propositions qui concernent TOUS les éléments considérés. La locution "pour tout" est appelée quantificateur universel. On peut la noter $\forall$.
La phrase précédente s'écrit alors mathématiquement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

« On peut trouver un nombre entier dont le carré vaut 4 »
Il existe des propositions qui concernent CERTAINS éléments (et en tout cas, au moins un). La locution "il existe" est appelée quantificateur existentiel. On peut la noter $\exists$.
La phrase précédente s'écrit alors : $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 = 4$.

➢ Reformulation d'énoncés en faisant apparaître les quantifications.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+5$.

Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à $2x+5$

2. L'équation $f(x)=2x+5$ a-t-elle des solutions ?

Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels f (x) et $2x+5$ *sont égaux ?*

3. Résoudre l'équation $f(x)=2x+5$.

Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels f (x) et $2x+5$ *sont égaux.*

★ Exercice 2.4

f est une fonction définie sur $[-4\ ;\ 4]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous. En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propositions, si elle est vraie ou fausse.

x	-4	-1	4
$f(x)$	-5 ↗	2	↘ -2

1. Il existe un nombre de $[-4\ ;\ 4]$ qui a une image strictement négative par *f*.

2. Tous les nombres de $[-4\ ;\ 4]$ ont une image strictement négative par *f*.

3. Tous les nombres de $[-4\ ;\ 4]$ ont une image strictement inférieure à 3 par *f*.

4. Il existe un nombre de $[-4\ ;\ 4]$ qui a une image supérieure à 3 par *f*.

★ Exercice 2.5

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout réel x, $2x+3=4$.

2. Il existe un réel x tel que $x^2=36$.

3. $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+2x-3=(x+1)^2-4$.

4. $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{3x-10}{x-4}=3$.

★ Exercice 2.6

Considérons les deux propositions suivantes :

Proposition 1 : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x > y)$.

Proposition 2 : $(\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x > y)$.

Ces propositions signifient-t-elles la même chose? Étudier la vérité de chacune d'elles.

★ Exercice 2.7

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est la fonction nulle

2. f s'annule

3. f est constante

4. f est majorée

★ Exercice 2.8

Exprimer la négation de :

1. « toutes les voitures sont rouges »

2. « au moins un chat n'est pas noir »

3. « au plus deux appareils sont défectueux »