# Suites réelles - Suites arithmétiques

## I. Généralités sur les suites

### 1. Définition, notation

Une suite numérique est une succession de nombres réels, chacun étant un terme de la suite. On numérote les termes, le plus souvent à partir de 0 ou de 1, ce qui revient à faire correspondre à des entiers naturels des nombres réels.

Exemple :

| Numéro du terme | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Terme | 3 | 9 | 27 | 81 |

**Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.**

L'image de l'entier *n* par la suite *u* se note $u_n$ au lieu de $u(n)$. $u_n$ se lit "*u* indice *n*".
On dit que $u_n$ est le terme de **rang** *n*. La suite *u* se note aussi $(u_n)$.

### 2. Mode de génération d'une suite : suite définie par une relation explicite

Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$. On définit une suite $(u_n)$ associée à la fonction *f*, en posant :
pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.
$u_n$ est l'image de l'entier *n* par la fonction *f*.

Exemple :

La fonction $f(x) = 2x^2 + 3$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est associée à la suite $(u_n)$ de terme général $u_n = 2n^2 + 3$ et de premier terme $u_0 = 3$. Par exemple, $u_{17} = ...$

Ainsi, lorsqu'une suite est définie par une relation explicite, il est possible de calculer directement un de ses termes.

### 3. Mode de génération d'une suite : suite définie par une relation de récurrence

Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle *I* et *a* un réel de *I*.
La suite $(u_n)$ définie, pour tout *n*, par :

$$\begin{cases} \text{premier terme :} & u_0 = a \\ \text{relation de récurrence :} & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est une suite récurrente associée à la fonction *f*.

Les calculs de termes s'effectuent de proche en proche (par exemple, en général, le calcul de $u_{50}$ nécessite de connaître $u_{49}$). Cette condition est réalisée si l'image par la fonction *f* de tout réel de *I* est dans *I*. On écrit $f(I) \subset I$.

★ **Exercice 1 :**

Dans chacune des situations ci-dessous :
– Définir la suite soit par une formule explicite, soit par une relation de récurrence ;
– Calculer les trois premiers termes ;

**1.** Antoine possède 100 euros. Chaque mois, il augmente cette somme de 15 euros.

**2.** Le terme initial est 3 et chaque terme est égal à l'inverse du précédent, augmenté de 2.

**3.** La population d'une ville est de 50 000 habitants. Chaque année, la population, vieillissante, décroît de 5 %, mais dans le même temps, elle enregistre l'arrivée de 3 000 nouvelles personnes.

### 4. Représentation graphique

Une suite numérique $(u_n)$ peut être représentée par un nuage de points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

## II. Suites arithmétiques

### 1. Définition

Une suite arithmétique est une suite obtenue en ajoutant au terme précédent toujours le même nombre, appelé raison. Pour tout *n* de $\mathbb{N}$, on note : $u_{n+1} = u_n + a$ avec $u_0$ ou $u_1$ donné.

Remarques :
- La relation $u_{n+1} = u_n + a$ est appelée relation de récurrence.
- Une suite arithmétique $(u_n)$ est donc définie par son premier terme et sa raison.

Exemples :
- 5 ; 8 ; 11 ; 14 est une suite arithmétique de quatre termes, de premier terme 5 et de raison 3.
- 12 ; 10,5 ; 9 ; 7,5 ; 6 est une suite arithmétique de cinq termes, de premier terme 12 et de raison – 1,5.

★ **Exercice 2 :**

On considère la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $a = -3$.

**1.** Calculer ses 5 premiers termes.

**2.** Placer les points dans un repère orthonormé. Que constate-t-on ?

### 2. Calcul du terme de rang *n*

Par définition, $u_1 = a + u_0$ et $u_2 = a + u_1$. D'où $u_2 = 2a + u_0$. Idem pour $u_3 \ldots$

Le terme de rang *n* d'une suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0$ et de raison *a* est :
$u_n = an + u_0$.
Si le premier terme est $u_1$, on a : $u_n = a(n-1) + u_1$.

Remarque :
Si on cherche $u_n$ en connaissant $u_p$, on a : $u_n = a(n-p) + u_p$.

Une suite arithmétique est une suite affine : tous les points $A_n(n\ ;\ u_n)$ sont situés sur une même droite, qui a pour coefficient directeur la raison *a* de la suite.

★ **Exercice 3 :**

**1.** Calculer le 50e terme de la suite arithmétique de premier terme 12 et de raison 3.

**2.** Calculer le 2017e terme de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 237{,}8$ et de raison $-0{,}4$.

### 3. Sens de variation

Dans le cas où *a* > 0, la suite $(u_n)$ est strictement croissante. Pour tout *n*, $u_n < u_{n+1}$.

Dans le cas où *a* < 0, la suite $(u_n)$ est strictement décroissante. Pour tout *n*, $u_n > u_{n+1}$.

Dans le cas où *a* = 0, pour tout *n*, $u_n = u_{n+1}$ : la suite $(u_n)$ est constante.

### 4. Reconnaître une suite arithmétique

- Soit $(u_n)$ une suite donnée. Si, pour tout *n*, la variation absolue $u_{n+1}-u_n$ est un nombre *a* constant (indépendant de *n*), alors la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison *a*.
- Soit $(u_n)$ une suite donnée. Si, pour tout *n*, $u_n$ est de la forme $an+b$, alors la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison *a*.

### 5. Sommes de termes

Quel est la somme des cent premiers nombres (termes d'une suite arithmétique de raison 1) ?

- La somme des *n* premiers entiers naturels est : $\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}$.

On note : $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\boxed{\text{Somme de termes consécutifs d'une SA} = (\text{nbre de termes}) \times \frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}}$$

★ **Exercice 4 :**

**1.** Calculer $\sum_{k=7}^{13} k^3$.

**2.** Écrire la somme *S* en utilisant la notation Σ : $S=2+5+8+11+14+17+20$.

<u>**Je retiens :**</u>

Les trois propositions (les 3F) ci-dessous sont équivalentes et il faut savoir passer de l'une à l'autre :

① <u>Formule de récurrence</u> : $\begin{cases} u_0 \text{ ou } u_1 \\ u_{n+1} = u_n + a \end{cases}$

② <u>Formulation</u> :

$(u_n)$ est la suite arithmétique de premier terme $u_0$ ou $u_1$ et de raison *a*.

③ <u>Formule explicite</u> :

pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_n = an + u_0$

OU pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, $u_n = a(n-1)+u_1$.

$$\boxed{\text{Somme de termes consécutifs d'une SA} = (\text{nbre de termes}) \times \frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}}$$