

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les exercices de base

Exercices progressifs

Julien Fernandez

Fonctions

I. La fonction ln

⇒ Exercice corrigé 1

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) + x$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) + x) = -\infty \end{array} \right. & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + x) = +\infty \end{array} \right. \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$



Rappel : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.



Remarque : la technique du « point, point, accolade » est LA technique la plus importante des limites.

2. $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$



Rappel : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$ car $x \in]0 ; +\infty[$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

⇒ Exercice corrigé 2

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - x$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = \ln(x) - x = \ln(x) + (-x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) - x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x) = -\infty \end{array}$$



Rappel : « $+\infty - \infty$ » est la seule forme indéterminée relative à l'addition ou à la soustraction.

2. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$



Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». Il faut alors factoriser, c'est-à-dire réduire au même dénominateur.

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}.$$



Remarque : on peut maintenant étudier le signe des deux facteurs.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1 - x$.



Remarque : ici, il est possible de poser l'inéquation

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	-1	$-\infty$

$$f(1) = \ln(1) - 1 = -1.$$

⇒ Exercice corrigé 3

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x)$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (c'est une limite du cours).

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$



Rappel : « $0 \times \infty$ » est la seule forme indéterminée relative à la multiplication.

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right) \times (x) = \ln x + 1.$$



Remarque : attention à bien reconnaître le produit « uv ». Ici, $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:



Remarque : ici, on pose directement l'inéquation.

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \ln x &> -1 \\ \Leftrightarrow x &> e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

⇒ Exercice corrigé 4

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{ par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$



Rappel : « $\frac{\infty}{0} = \infty$ » et « $\frac{0}{\infty} = 0$ » ne sont pas des formes indéterminées.



Remarque : lorsqu'une limite comporte une « division par 0 », on doit faire attention au signe du dénominateur.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées (c'est une limite du cours).}$$



Rappel : « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » sont les deux formes indéterminées relatives à la division.

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times (x) - (1) \times (\ln x)}{(x)^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$



Remarque : attention à bien reconnaître le produit « $\frac{u}{v}$ ». Ici, $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x^2 > 0$ car $x > 0$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln x$.

$$1 - \ln x > 0.$$

$$\Leftrightarrow -\ln x > -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < e \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

II. La fonction exp

⇒ Exercice corrigé 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Rappel : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

2. $f'(x) = e^x + 1$



Rappel : $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

⇒ Exercice corrigé 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^x - x = e^x + (-x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = e^x - 1$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:



Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». On pose alors l'inéquation.

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(0) = e^0 - 0 = 1.$$

⇒ Exercice corrigé 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^x) + (x) \times (e^x) = e^x + x e^x = e^x (x+1).$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

⇒ Exercice corrigé 4

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- puis en 0^+ .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées (c'est une limite de cours).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array}$$



Rappel : « $\frac{0}{\infty}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

En termes de limites : $\frac{0}{\infty} = 0$ et $\frac{\infty}{0} = \infty$ (reste à déterminer si c'est $-\infty$ ou $+\infty$).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \times (x) - (1)' \times (e^x)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}.$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$e^x > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [.$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$	
f	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow e \nearrow +\infty$	

$$f(1) = \frac{e}{1} = e.$$

⇒ Exercice corrigé 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = 2e^{2x} + 1$

Rappel : $(e^{ax})' = a e^{ax}$ donc $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty \nearrow +\infty$	



⇒ Exercice corrigé 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{2x} - x = e^{2x} + (-x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = 2e^{2x} - 1$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} & 2e^{2x} - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2e^{2x} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & e^{2x} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & 2x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[, \\ \Leftrightarrow & x \geq -\frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\ln(2)/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$(1+\ln 2)/2$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = e^{2x\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)} - \left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}.$$

⇒ Exercice corrigé 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{2x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^{2x}) + (2e^{2x}) \times (x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(2x+1).$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $2x+1$.

$$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} e^{-1} = -\frac{1}{2e}.$$

⇒ Exercice corrigé 8

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- puis en 0^+ .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(2e^{2x}) \times (x) - (1) \times (e^{2x})}{x^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}.$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$e^{2x} > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[.$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[.$$

$$\text{Donc } f'(x) \text{ est du signe de } 2x-1. \quad 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
f	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2e$	$2e \nearrow +\infty$	$+\infty$

$$f(0,5) = \frac{e^{2 \times 0,5}}{1/2} = \frac{e}{1/2} = 2e.$$

⇒ Exercice corrigé 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = -e^{-x} + 1$



Rappel : $(e^{ax})' = a e^{ax}$ donc $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} -e^{-x} + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -e^{-x} &\geq -1 \\ \Leftrightarrow e^{-x} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow -x &\leq 0 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[, \\ \Leftrightarrow x &\geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(0) = e^{-0} + 0 = 1.$$

⇒ Exercice corrigé 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{-x} - x = e^{-x} + (-x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. $f'(x) = -e^{-x} - 1$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) < 0$ comme somme de deux termes négatifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

⇒ Exercice corrigé 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^{-x}) + (x) \times (-e^{-x}) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

$$1-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$f(1) = (1)e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

⇒ Exercice corrigé 12

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- puis en 0^+ .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées (et la règle des signes),} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x}) \times (x) - (1) \times (e^{-x})}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}.$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$e^{-x} > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[.$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

$$-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-	-
f	$-\infty$	$-e$	$+\infty$	0

$$f(-1) = \frac{e^{-(-1)}}{-1} = -e.$$

III. Branches infinies

Asymptotes verticales et horizontales

⇒ Exercice corrigé 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

Correction :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.



Rappel : Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f .



Rappel : Si $\lim_{x \rightarrow a^- \text{ ou } a^+} f(x) = \pm\infty$, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

⇒ Exercice corrigé 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1-2x}{x-1}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

Correction :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

2. On a besoin du signe de $x-1$. $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} 1-2x = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array}.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f .

Asymptotes obliques : équation de l'asymptote donnée

⇒ Exercice corrigé 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Correction :

$$\blacksquare f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x} - (2x + 1) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.



Rappel : Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

⇒ Exercice corrigé 4

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.

Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Correction :

- $f(x) - (x - 2) = \frac{x^2 + 1}{x + 2} - (x - 2) = \frac{x^2 + 1 - (x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \frac{x^2 + 1 - x^2 + 4}{x + 2} = \frac{5}{x + 2}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0.$

On en déduit que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Remarque : c'est aussi le cas en $-\infty$.

Asymptotes obliques : équation de l'asymptote à deviner

⇒ Exercice corrigé 5

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -3x + 2 + \frac{\ln x}{x}$.

Montrer que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

Correction :

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-3x + 2)] = 0.$

On en déduit que la droite d'équation $y = -3x + 2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.



Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ alors $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f .

⇒ Exercice corrigé 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + x e^x$.

Montrer que la courbe représentative de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

Correction :

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

Matrices

I. Matrices inverses

⇒ Exercice corrigé 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est-elle inversible ? Si oui, donner sa matrice inverse A^{-1} .

Correction :

Cours :



Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ici : $1 \times 2 - 1 \times 4 = 2 - 4 = -2 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

⇒ Je m'entraîne

① Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

② Même exercice avec $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

③ Même exercice avec $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

④ Même exercice avec $E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

⇒ Exercice corrigé 2

On considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer Q^2 .
2. En déduire que Q est inversible et donner Q^{-1} .

Correction :**Cours :**

Soient deux matrices A et B telles que $A \times B = I$. Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

1. $Q^2 = Q \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $Q \times Q = I$. Donc Q est inversible et $Q^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

⇒ Je m'entraîne

① On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

② On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner P^{-1} .

③ On considère les matrices $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Calculer $R \times S$. En déduire que R est inversible et donner R^{-1} .

⇒ Exercice corrigé 3

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $P \times Q$. Conclure.

Correction :**Cours :**

Soient deux matrices A et B telles que $A \times B = k \times I$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{k} B$.

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I. \text{ Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{6} Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$



L'écriture $P^{-1} = \frac{1}{6} Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ suffit et est même conseillée !

⇒ Je m'entraîne

① On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

⇒ Exercice corrigé 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A - 2I$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

Correction :

$$1. \quad A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Par suite, } A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$2. \quad A^2 - A - 2I = O$$

$$\Leftrightarrow A^2 - A = 2I$$

$$\Leftrightarrow A(A - I) = 2I$$



On reconnaît la propriété de l'exercice précédent : $A \times B = 2I$ avec $B = (A - I)$.

$$A \text{ est donc inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

⇒ Je m'entraîne

$$\textcircled{1} \quad \text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - 2A^2 - A + 2I$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

$$\textcircled{2} \quad \text{Autre version : on considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - I)(A - 2I)(A + I)$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

⇒ Exercice corrigé 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

Correction :

1. A est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nul.
Donc A est inversible.

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{matrix} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -0,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 / 2 \\ L_2 \leftarrow L_2 / 2 \end{matrix} \quad \text{Finalement, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -2 \\ 0 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

⇒ Je m'entraîne

① On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

② On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

③ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Justifier que A est inversible et calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

⇒ Exercice corrigé 6

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Correction :

Occupons-nous de la matrice A . On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

La matrice de gauche est triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls, donc A est inversible.

$$\begin{aligned}
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 / 3 \\ L_2 \leftarrow L_2 / (-3) \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}
\end{aligned}$$

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Occupons-nous maintenant de la matrice B . On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_1 - L_3 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3
\end{aligned}$$

La matrice de gauche est triangulaire supérieure et possède un élément diagonal nul, donc B n'est pas inversible.

⇒ **Je m'entraîne**

① Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$