

Raisonnements

I. Langage courant et langage mathématique

II. Proposition conditionnelle

★ Exercice 2.1

Dans cet exercice, on considère la proposition conditionnelle (implication) suivante :

“Si je suis anglais, alors je parle l’Anglais”

1. Quelle est la réciproque de cette proposition ?
2. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
3. Chacune des trois propositions formulées est-elle vraie ou fausse ?

Correction :



Une **proposition conditionnelle** est une phrase logique de la forme : « si .. P .. alors .. Q .. ».

Exemples :

S’il fait beau alors j’irai à la plage.

Si je suis marseillais, alors je suis en ECP1.

Une proposition peut être *vraie* ou *fausse*.

Mathématiquement, on note : $P \Rightarrow Q$.

La proposition $Q \Rightarrow P$ est la proposition réciproque.

La proposition $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ est la proposition contraposée.

1. “Si je parle l’Anglais, alors je suis anglais”.
2. “Si je ne parle pas l’Anglais, alors je ne suis pas anglais”.
3. La proposition de l’énoncé est vraie, sa réciproque est fausse et sa contraposée est vraie.
On démontre qu’une proposition et sa contraposée ont même valeur de vérité, c’est-à-dire qu’elles sont toutes les deux vraies ou bien toutes les deux fausses.

★ **Exercice 2.2**

Dans cet exercice, on considère la proposition conditionnelle suivante :

“Si je suis un bachelier professionnel, alors je suis en CPGE ECP”

1. Quelle est la réciproque de cette proposition ?
2. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
3. Quelle est la contraposée de la réciproque de cette proposition ?
4. Chacune des quatre propositions formulées est-elle vraie ou fausse ?

Correction :

1. “Si je suis en CPGE ECP, alors je suis un bachelier professionnel ”
2. “Si je ne suis pas en CPGE ECP, alors je ne suis pas un bachelier professionnel ”
3. “Si je ne suis pas un bachelier professionnel, alors je ne suis pas en CPGE ECP”
4. La proposition de l'énoncé est fausse, sa réciproque est vraie, sa contraposée est fausse et la contraposée de sa réciproque est vraie.

★ **Exercice 2.3**

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

Correction :

L'énoncé concerne seulement les cosmonautes américains (qui portent alors une chemise rouge). Par contraposée, l'énoncé concerne aussi ceux qui ne portent pas une chemise rouge (et qui ne sont alors pas américains).

1. Par contraposée, il n'est pas cosmonaute américain.
2. L'énoncé ne concerne pas ceux qui portent une chemise rouge. Donc on ne sait pas.
3. L'énoncé ne concerne que les américains. Donc on ne sait pas.
4. Il s'agit d'un cosmonaute américain. Il porte une chemise rouge.

III. Quantificateur universel, quantificateur existentiel

★ Exercice 2.4

f est une fonction définie sur $[-4 ; 4]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous. En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propositions, si elle est vraie ou fausse.

x	-4	-1	4
$f(x)$	-5	2	-2

1. Il existe un nombre de $[-4 ; 4]$ qui a une image strictement négative par f .
2. Tous les nombres de $[-4 ; 4]$ ont une image strictement négative par f .
3. Tous les nombres de $[-4 ; 4]$ ont une image strictement inférieure à 3 par f .
4. Il existe un nombre de $[-4 ; 4]$ qui a une image supérieure à 3 par f .

Correction :

1. C'est exact. Par exemple l'image de 4 est -2 .
2. C'est faux. Contreexemple : l'image de -1 est 2.
3. C'est exact. Le maximum de la fonction sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ est 2.
4. C'est inexact d'après la réponse précédente.

★ Exercice 2.5

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout réel x , $2x + 3 = 4$.
2. Il existe un réel x tel que $x^2 = 36$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{3x-10}{x-4} = 3$.

Correction :

1. C'est faux : si on remplace x par 1, $2 \times 1 + 3 \neq 4$.
2. Oui. 6 est solution de l'équation $x^2 = 36$ (-6 aussi).
3. Développons l'expression : $(x+1)^2 - 4$.

$$\text{Rappel : } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3.$$

La proposition est donc vraie.

4. S'il existe x tel que $\frac{3x-10}{x-4} = 3 \Rightarrow 3x-10 = 3(x-4) \Leftrightarrow 3x-10 = 3x-12 \Leftrightarrow 2 = 0$.

On 2 n'est pas égal à 0. La proposition est donc fausse.

★ Exercice 2.6

Considérons les deux propositions suivantes :

Proposition 1 : $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y)$.

Proposition 2 : $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y)$.

Ces propositions signifient-t-elles la même chose? Étudier la vérité de chacune d'elles.

Correction :

La proposition 1 dit : « pour tout nombre réel choisi, on peut trouver un nombre plus petit ».

Cette proposition est donc vraie (il suffit de retrancher 1).

La proposition 2 dit : « il existe un nombre plus grand que tous les autres ».

C'est totalement faux.

★ Exercice 2.7

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- | | |
|------------------------------|--------------------|
| 1. f est la fonction nulle | 2. f s'annule |
| 3. f est constante | 4. f est majorée |

Correction :

1. f est la fonction nulle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
2. f s'annule : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
3. f est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$.
4. f est majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

★ Exercice 2.8

Exprimer la négation de :

1. « toutes les voitures sont rouges »
2. « au moins un chat n'est pas noir »
3. « au plus deux appareils sont défectueux »

Correction :



Le contraire de « aucun » est « au moins un ».

Le contraire de « tous » est « au moins un » suivi d'une négation.

1. « au moins une voiture n'est pas rouge »
2. « aucun chat n'est pas noir » ou, mieux, « tous les chats sont noirs ».
3. « plus de trois appareils sont défectueux ».