

Suites réelles – Suites arithmétiques
Exercices

Calculs de termes

★ Exercice 3.1

1. La suite (u_n) est définie par tout n par : $u_n = 2n - 3$. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. La suite (v_n) est définie par tout n par : $v_n = 2n^2 - 3n + 1$. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

Correction :

1. On remplace n par 0 : $u_0 = 2 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$.
On remplace n par 1 : $u_1 = 2 \times 1 - 3 = 2 - 3 = -1$.
On remplace n par 2 : $u_2 = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.
2. On remplace n par 0 : $v_0 = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$.
On remplace n par 1 : $v_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$.
On remplace n par 2 : $v_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$.

★ Exercice 3.2

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$, et pour tout n par : $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (v_n) est définie par $v_1 = 2$, et pour tout n par : $v_{n+1} = 3v_n - 2$. Calculer v_2 et v_3 .

Correction :

1. On remplace n par 0 : $u_{1+0} = u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$.
On remplace n par 1 : $u_{1+1} = u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$.
2. On remplace n par 1 : $v_{1+1} = v_2 = 3 \times v_1 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$.
On remplace n par 2 : $v_{1+2} = v_3 = 3 \times v_2 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$.

★ Exercice 3.3

On considère la suite telle que $u_1 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n}$.

Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

Correction :

On remplace n par 1 : $u_2 = \frac{u_1 - 2}{u_1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$.

On remplace n par 2 : $u_3 = \frac{u_2 - 2}{u_2} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}$.

On remplace n par 3 : $u_4 = \frac{u_3 - 2}{u_3} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{6}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = -\frac{5}{3} \times \frac{3}{1} = -5$.

★ **Exercice 3.4**

Calculer les cinq premiers termes des suites définies par :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$; 2. $\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 12 - u_n - u_{n-1} \end{cases}$

Correction :

1. $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

On remplace n par 0 : $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2$.

On remplace n par 1 : $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$.

On remplace n par 2 : $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$.

2. $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

On remplace n par 1 : $u_2 = 12 - u_1 - u_0 = 12 - 1 - 1 = 10$.

On remplace n par 2 : $u_3 = 12 - u_2 - u_1 = 12 - 10 - 1 = 1$.

On remplace n par 3 : $u_4 = 12 - u_3 - u_2 = 12 - 1 - 10 = 1$.

★ **Exercice 3.5**

Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{1}{2n+1}$.

Calculer, en fonction de n , u_{n+2} , u_{2n} , u_{n^2} et, pour $n \geq 3$, u_{n-3} .

Correction :

On remplace n par $n+2$: $u_{n+2} = \frac{1}{2(n+2)+1} = \frac{1}{2n+4+1} = \frac{1}{2n+5}$.

On remplace n par $2n$: $u_{2n} = \frac{1}{2(2n)+1} = \frac{1}{4n+1}$.

On remplace n par n^2 : $u_{n+2} = \frac{1}{2n^2+1}$.

On remplace n par $n-3$: $u_{n+2} = \frac{1}{2(n-3)+1} = \frac{1}{2n-6+1} = \frac{1}{2n-5}$.

★ **Exercice 3.6**

1. La suite (u_n) est définie par tout n par : $u_n = 3^n - 2^n$. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$, et pour tout n par : $v_{n+1} = 2v_n - 5$. Calculer v_1 et v_2 .
3. La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$, et pour tout n par : $w_{n+1} = 2w_n + n - 1$.

Calculer w_1 et w_2 .

Parcours rouge : même question avec $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + n - 2$.

Correction :

1. On remplace n par 0 : $u_0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$.

On remplace n par 1 : $u_1 = 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1$.

On remplace n par 2 : $u_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$.

2. On remplace n par 0 : $v_1 = 2v_0 - 5 = 2 \times 6 - 5 = 12 - 5 = 7$.

On remplace n par 1 : $v_2 = 2v_1 - 5 = 2 \times 7 - 5 = 14 - 5 = 9$.

3. On remplace n par 0 : $w_1 = 2w_0 + 0 - 1 = 2 \times 1 + 0 - 1 = 2 - 1 = 1$.

On remplace n par 1 : $w_2 = 2w_1 + 1 - 1 = 2 \times 1 + 1 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$.

Parcours rouge :

On remplace n par 0 : $w_1 = \frac{1}{3}w_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{5}{3}$.

On remplace n par 1 : $w_2 = \frac{1}{3}w_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 - 2 = \frac{-5}{9} - 1 = \frac{-5}{9} - \frac{9}{9} = -\frac{14}{9}$.

★ Exercice 3.7

1. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2^{n+1} - 1$.
Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
2. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$.
Calculer v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .
3. Parcours rouge : Conjecturer une relation entre la suite (u_n) et la suite (v_n) puis conjecturer une expression explicite de v_n .

Correction :

1. On remplace n par 0 : $u_0 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.
On remplace n par 1 : $u_1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.
On remplace n par 2 : $u_2 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.
On remplace n par 3 : $u_3 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$.
2. On remplace n par 0 : $v_1 = 2v_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$.
On remplace n par 1 : $v_2 = 2v_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$.
On remplace n par 2 : $v_3 = 2v_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$.
On remplace n par 3 : $v_4 = 2v_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$.
3. On a : $v_1 = u_0$, $v_2 = u_1$, $v_3 = u_2$ et $v_4 = u_3$. Il semble que $v_n = u_{n-1}$.
Or $u_n = 2^{n+1} - 1$, donc il semble que $v_n = u_{n-1} = 2^{(n-1)+1} - 1 = 2^n - 1$.

★ Exercice 3.8

On considère la suite (u_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nu_n = (n+1)u_{n-1} + 1 \text{ et } u_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir u_{10} .
2. Conjecturer une formule explicite pour u_n . Que vaudrait u_{2017} ?

Correction :

1. On remplace n par 10 : $10u_{10} = 11u_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 209 + 1 = 210$. Finalement, $u_{10} = 21$.

2. Il semble que (u_n) soit arithmétique de raison 2.

Il semble donc que : $u_n = an + u_0 = 2n + 1$. On aurait alors : $u_{2017} = 2 \times 2017 + 1 = 4035$.

Suites arithmétiques

★ Exercice 3.9

Déterminer les formules explicites des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_0 = 2$ et $a = 5$.

2. $u_0 = -2$ et $a = 3$.

3. $u_0 = 1$ et $a = -2$.

4. $u_0 = 0$ et $a = 4$.

5. $u_1 = 1$ et $a = 3$.

Correction :

1. $u_n = an + u_0 = 5n + 2$.

2. $u_n = an + u_0 = 3n - 2$.

3. $u_n = an + u_0 = -2n + 1$.

4. $u_n = an + u_0 = 4n$.

5. $u_n = a(n-1) + u_1 = 3(n-1) + 1 = 3n - 3 + 1 = 3n - 2$.

★ Exercice 3.10

Pour chacune des suites ci-dessous :

- reconnaître la nature de la suite,
- déterminer u_n en fonction de n .

1.
$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} u_1 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

Correction :

1. (u_n) est la suite arithmétique de raison -2 et de terme initial $u_0 = -3$.

$$u_n = an + u_0 = -2n - 3.$$

2. (u_n) est la suite arithmétique de raison 3 et de terme initial $u_1 = 5$.

$$u_n = a(n-1) + u_1 = 3(n-1) + 5 = 3n - 3 + 5 = 3n + 2.$$

3. (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 et de terme initial $u_1 = -7$.

$$u_n = a(n-1) + u_1 = 5(n-1) - 7 = 5n - 5 - 7 = 5n - 12.$$

★ **Exercice 3.11**

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de terme initial $u_0 = 3$. Calculer u_{50} .
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $u_1 = -7$. Calculer u_{103} .
3. Parcours vert :
 (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 6$ et $u_{35} = -3$. Calculer sa raison.

Correction :

1. $u_{50} = a \times 50 + u_0 = -2 \times 50 + 3 = -100 + 3 = -97$.

2. $u_{103} = a \times 102 + u_1 = \frac{1}{2} \times 102 - 7 = 51 - 7 = 44$.

3. a est un coefficient directeur car une suite arithmétique est une suite affine.

Si on connaît deux termes u_n et u_p d'une suite arithmétique, on a : $a = \frac{u_n - u_p}{n - p}$.

$$\text{Ici : } a = \frac{u_{35} - u_5}{35 - 5} = \frac{-3 - 6}{35 - 5} = \frac{-9}{30} = \frac{-3}{10} = -0,3.$$

★ **Exercice 3.12**

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_6 = 36$ et $u_9 = 81$.

1. Calculer la raison de (u_n) .
2. Déterminer u_{20} .

Correction :

1. $a = \frac{u_9 - u_6}{9 - 6} = \frac{81 - 36}{9 - 6} = \frac{45}{3} = 15.$

2. Les deux formules $u_n = an + u_0$ et $u_n = a(n-1) + u_1$ se généralisent et on peut écrire par exemple $u_n = a(n-2) + u_2$ ou plus généralement $u_n = a(n-p) + u_p$ (formule « hors programme »).

Ici : $u_{20} = a(20-9) + u_9 = 15 \times 11 + 81 = 165 + 81 = 246.$

★ **Exercice 3.13**

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = (n+1)^2 - n^2 + 7.$

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
2. Cette suite est-elle arithmétique ?

Correction :

1. On remplace n par 0 : $u_0 = (0+1)^2 - 0^2 + 7 = 1^2 - 0 + 7 = 1 + 7 = 8.$

On remplace n par 1 : $u_1 = (1+1)^2 - 1^2 + 7 = 2^2 - 1^2 + 7 = 4 - 1 + 7 = 10.$

On remplace n par 2 : $u_2 = (2+1)^2 - 2^2 + 7 = 3^2 - 2^2 + 7 = 9 - 4 + 7 = 12.$

On remplace n par 3 : $u_3 = (3+1)^2 - 3^2 + 7 = 4^2 - 3^2 + 7 = 16 - 9 + 7 = 14.$

2. Compte tenu des calculs précédents, il semble que oui mais il est nécessaire de le démontrer.

Simplifions l'écriture de u_n :

$$u_n = (n+1)^2 - n^2 + 7 = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 7 = 2n + 8.$$

(u_n) est donc une suite affine. C'est en l'occurrence la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 8.$

Sommes de termes

★ **Exercice 3.14**

Calculer les sommes suivantes :

1. $1 + 2 + 3 + \dots + 1\,000$
2. Parcours vert : $101 + 102 + \dots + 200$

Correction :

1. Par cours, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici, $1 + 2 + 3 + \dots + 1\,000 = \frac{1\,000 \times 1\,001}{2} = 500 \times 1\,001 = 500\,500$.

2. Ici, $101 + 102 + \dots + 200 = (1 + 2 + \dots + 200) - (1 + 2 + \dots + 100)$

$$\Leftrightarrow 101 + 102 + \dots + 200 = \frac{200 \times 201}{2} - \frac{100 \times 101}{2}$$

$$\Leftrightarrow 101 + 102 + \dots + 200 = 100 \times 201 - 50 \times 101 = 20\,100 - 5\,050 = 15\,050$$

★ Exercice 3.15

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de terme initial $u_0 = 3$. Calculer la somme de ses 100 premiers termes.

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $u_1 = 0$.

Calculer $u_1 + \dots + u_{29}$.

3. Parcours rouge : calculer $\sum_{n=1}^{200} (2n+5)$ de deux façons différentes.

Correction :

Par cours :

Somme de termes consécutifs d'une SA = (nbre de termes) $\times$ $\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

1. Le 100^e terme est $u_{99} = a \times 99 + u_0 = 2 \times 99 + 3 = 201$.

On en déduit : $S = 100 \times \frac{3 + 201}{2} = 100 \times \frac{204}{2} = 100 \times 102 = 10200$.

2. $u_{29} = a \times 28 + u_1 = \frac{1}{2} \times 28 + 0 = 14$, donc $S = 29 \times \frac{0 + 14}{2} = 29 \times 7 = 203$.

3. Première méthode : Si on pose $u_n = 2n + 5$, (u_n) est la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5$. Il vient :

$$\sum_{n=1}^{200} (2n+5) = \sum_{n=1}^{200} u_n = 200 \times \frac{u_1 + u_{200}}{2} = 100 \times (7 + 405) = 100 \times 412 = 41200.$$

Deuxième méthode : par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=1}^{200} (2n+5) = 2 \times \sum_{n=1}^{200} n + \sum_{n=1}^{200} 5 = 2 \times \frac{200 \times 201}{2} + 200 \times 5 = 40200 + 1000 = 41200.$$



★ Exercice 3.16

1. Déterminer le sens de variation de la suite arithmétique (u_n) de raison -2 et de terme initial $u_0 = -5$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + n^2 + n$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $u_n = (n-1)^2$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par $u_n = \frac{n^2 + 1}{n-1}$.
 - a) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}$.
 - b) On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)}$.
Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
 - c) Calculer u_2 et u_3 . En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante en précisant à partir de quel indice.

Correction :

Par cours :

Pour déterminer les variations d'une suite, on peut déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.

Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante.

1. On a : $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On en déduit : $u_{n+1} - u_n = -2 \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

2. On a $u_{n+1} - u_n = n^2 + n \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ car $n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

3. Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1-1)^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1.$$

Comme $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est donc croissante.



$$\begin{aligned}
 \text{4. a)} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1) - 1} - \frac{n^2 + 1}{n - 1} = \frac{n^2 + 2n + 1 + 1}{n} - \frac{n^2 + 1}{n - 1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n} - \frac{n^2 + 1}{n - 1}, \\
 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n &= \frac{(n-1)(n^2 + 2n + 2) - n(n^2 + 1)}{n(n-1)} = \frac{n^3 + 2n^2 + 2n - n^2 - 2n - 2 - n^3 - n}{n(n-1)}, \\
 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n &= \frac{n^2 - n - 2}{n(n-1)}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, $(n+1)(n-2) = n^2 - 2n + n - 2 = n^2 - n - 2$.

On a donc bien, finalement, $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}$.

- b) ■ $x+1 \geq 0$ car $x \in]1; +\infty[$.
- $x \geq 0$ car $x \in]1; +\infty[$.
- $x-1 \geq 0$ car $x \in]1; +\infty[$.
- Donc $f(x)$ est du signe de $x-2$.
- $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

On en déduit le tableau de signe de $f(x)$:

x	1	2	$+\infty$
signe.de.f(x)	0	-	+

c) $u_2 = \frac{2^2 + 1}{2 - 1} = 5$ et $u_3 = \frac{3^2 + 1}{3 - 1} = 5$.

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ étant donné à la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 3.