Vers la ECP

E.C.P.1 Lycée Jean PERRIN

Les bases du calcul

Julien Fernandez
perrin_maths@hotmail.fr

Calculs numériques

I. Premiers fondamentaux

★ **Tables de multiplication et carrés :**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	2	4									
3	3	6	9								
4	4	8	12	16							
5	5	10	15	20	25						
6	6	12	18	24	30	36					
7	7	14	21	28	35	42	49				
8	8	16	24	32	40	48	56	64			
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81		
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121

Par exemple, 7×7 s'écrit 7^2 et se lit « 7 au carré ».

★ **Fraction et décimaux :**

$$\frac{1}{2}=0,5$$

$$\frac{1}{4}=0,25\ ;\ \frac{3}{4}=0,75$$

$$\frac{1}{5}=0,2\ ;\ \frac{2}{5}=0,4\ ;\ \frac{3}{5}=0,6\ ;\ \frac{4}{5}=0,8$$

$$\frac{1}{8}=0,125\ ;\ \frac{3}{8}=0,375\ ;\ \frac{5}{8}=0,625\ ;\ \frac{7}{8}=0,875$$

★ Multiplication et division par 10, 100, 1000… :

- Pour multiplier par 10, 100, 1000… : on déplace la virgule de un, deux, trois… rangs vers la droite.
- Pour diviser par 10, 100, 1000… : on déplace la virgule de un, deux, trois… rangs vers la gauche.

★ **Multiplication posée :**

Règle : connaître ses tables de multiplication !

EXEMPLE TRÈS SIMPLE pour commencer

	1	2
x		4
	4	8

on effectue successivement
4 fois 2 qui donne 8 pour les unités
puis 4 x 1 qui donne 4 pour les dizaines

Résultat **4 x 12 = 48**

EXEMPLE SIMPLE avec deux chiffres

	1	2
x	2	4
	4	8
2	4	0
2	8	8

On effectue la multiplication
en deux temps
- avec l'unité: 4 x 12 = 48
- avec la dizaine: 20 x 12 = 240

on additionne les deux résultats partiels

Notez bien que le 24 = 20 + 4;
C'est pourquoi, il faut multiplier 12 par 20 et non seulement par 2.

Résultat **24 x 12 = 288**

EXEMPLE SIMPLE avec trois chiffres

		2	2	2
	x	1	2	4
		8	8	8
	4	4	4	0
2	2	2	0	0
2	7	5	2	8

Trois chiffres => trois étages

En général, on ne mentionne pas
les 0 de droite (ici en vert)

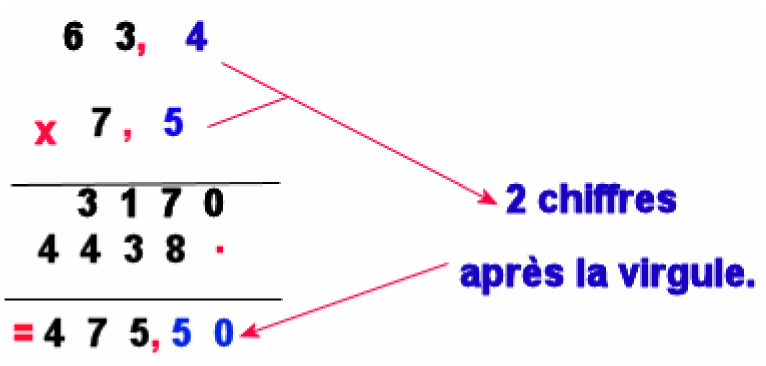
Résultat **124 x 222 = 27 528**

Une vidéo si nécessaire : https://www.youtube.com/watch?v=ShIuDUmVVpw

★ **Multiplication avec des décimaux :**

Règle : pour multiplier des nombres décimaux entre eux :
- on effectue la multiplication sans les virgules ;
- le résultat a autant de chiffres après la virgule que la somme des nombres de chiffres après la virgule des deux nombres.

Exemple : on souhaite effectuer $0,2\times 0,4$.
- On effectue d'abord $2\times 4=8$.
- Il y a au total deux chiffres après la virgule. Le résultat final a donc deux chiffres après la virgule. C'est donc 0,08.



Une vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=4YQi_icWTTI
(chaîne Youtube d'Yvan Monka)
Site associé : https://www.maths-et-tiques.fr/

★ Division posée :

Deux vidéos conseillées, au choix :
https://www.youtube.com/watch?v=liOdPZes24M
https://www.youtube.com/watch?v=ZIwmQ3KSMH0

II. Calculs avec des nombres relatifs

Deux playlists recommandées ***<u>après la lecture du chapitre</u>*** :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaq9IBuon2YB9q3yChTQ20b3
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCao5lUU-DDfTRggnJbLHQOLK

★ **Nombres relatifs :**

- Un nombre relatif est un nombre qui peut être soit positif, soit négatif (il a un *signe*).
  Exemples : 5 ; -2 ; $3{,}12$; $-7{,}125$; $-\dfrac{7}{3}$ …
- L'ensemble des *entiers* (nombres sans virgule) *relatifs* (positifs ou négatifs) est noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des entiers naturels (positifs) est noté $\mathbb{N}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (*inclus*).

★ **Produit de nombres relatifs :**

Règle des signes :
- Lorsqu'on multiplie deux nombres positifs, le résultat de la multiplication (qui se nomme le *produit*) est <u>positif</u>.
- Lorsqu'on multiplie deux nombres négatifs, le produit est <u>positif</u>.
- Lorsqu'on multiplie un nombre positif par un nombre négatif, le produit est <u>négatif</u>.

Exemples :

$2\times(-5)$ est négatif et est égal à -10.

$-4\times(-7)$ est positif et est égal à 28.

$(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)$ est positif et est égal à 24.

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=(-1)^7$ est négatif et est égal à -1.

★ Quotient de nombres relatifs :

Règle :
Lorsqu'on divise deux nombres relatifs, le signe du résultat de la division (qui se nomme *quotient*) vérifie :

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

★ **Somme de nombres relatifs :**

Règle :

- Lorsqu'on additionne deux nombres de même signe, le résultat de l'addition (qui se nomme la *somme*) est obtenu en additionnant les deux valeurs sans les signes (qui se nomme la *valeur absolue*) puis en « ajoutant » le signe des deux nombres.
- Lorsqu'on additionne deux nombres de signes contraires, la somme est obtenue en effectuant la plus grande valeur moins la plus petite puis en « ajoutant » le signe de la plus grande valeur.

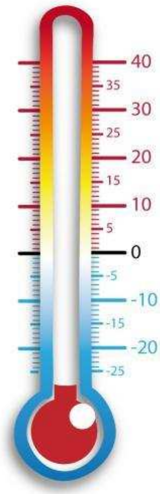
Exemples :

$(-3)+(-5)$: il faut additionner deux nombres de même signe. On additionne 3 et 5, ce qui donne 8. Puis on « ajoute » le signe. Donc $(-3)+(-5)=-8$.

$-8+3$: on doit additionner deux nombres de signes contraires. La plus grande valeur est 8 et la plus petite est 3. On les soustrait, ce qui donne 5. Enfin, on « ajoute » le signe de la plus grande valeur. Donc $-8+3=-5$ et surtout pas -11 comme beaucoup d'élèves le pensent.

Astuces :

Pour additionner des nombres relatifs, vous pouvez utiliser une des deux images mentales suivantes :



- Le thermomètre

On part de 0°C et on descend quand on rencontre un nombre négatif (on se refroidit) et on augmente quand on rencontre un nombre positif (on se réchauffe).
Par exemple, pour effectuer $-8+3$, on part de 0, on descend de 8°C et on remonte de 3°C. Au final, on est descendu de 5°C.

- L'argent !

Vous avez un porte-monnaie et vous perdez de l'argent quand vous rencontrez un nombre négatif et vous en gagnez si vous rencontrez un nombre positif.
À la fin, on fait le bilan.
Par exemple, pour effectuer $-8+3$, vous perdez d'abord 8 € puis vous regagnez 3 €.
Au final, vous avez quand même perdu 5 €.

★ Différence de nombres relatifs :

Règle :
Lorsqu'on soustrait deux nombres relatifs, le résultat de la soustraction (qui se nomme *différence*) vérifie :

$$a-(+b)=a-b$$

$$a-(-b)=a+b$$

★ Additions et soustractions de plusieurs nombres relatifs :

Règle :
On considère le calcul comme une somme de nombres positifs ou négatifs.
- Soit on calcule « de gauche à droite » en appliquant, si besoin, l'astuce du thermomètre ou des euros.
- Soit on regroupe tous les nombres positifs entre eux puis tous les nombres négatifs entre eux et on se ramène à l'addition de deux nombres relatifs.

Exemple :
On souhaite calculer $5+(-4)-6-(-3)+(-1)$.
On gagne 5 €, on perd 4 €, on perd 6 €, on regagne 3 € et on perd 1 € : on a perdu 3 € au final !
Ou bien : la somme des nombres positifs est 8 et la somme des nombres négatifs est -11. $8+(-11)=-3$.

★ **Calculs avec plusieurs opérations :**

Règles des priorités opératoires :
Dans un calcul comportant plusieurs opérations les priorités opératoires sont :
- les parenthèses sont prioritaires ;
- en absence de parenthèses, les puissances sont prioritaires ;
- ensuite les multiplications et les divisions sont prioritaires ;
- enfin, on effectue les additions et les soustractions.

Exemple :

Calculer : $A=5+\left(1+\frac{6}{2}\right)-2^2\times 3$.

Remarque : on procède par étape (on fait une seule chose à chaque fois) dans un calcul *verticalisé* (il est plus facile de voir quel calcul est fait à chaque étape).

$$A=5+\left(1+\frac{6}{2}\right)-2^2\times 3$$

$\Leftrightarrow$ $A=5+(1+3)-2^2\times 3$ // dans la parenthèse (prioritaire), on commence par la division

$\Leftrightarrow$ $A=5+4-2^2\times 3$ // la parenthèse est prioritaire

$\Leftrightarrow$ $A=5+4-4\times 3$ // le carré (puissance 2) est prioritaire

$\Leftrightarrow$ $A=5+4-12$ // la multiplication est prioritaire

$\Leftrightarrow$ $A=-3$ // reste à effectuer les additions et les soustractions

Vidéos

Playlist (dans Youtube, rechercher « calcul numérique - 5^e » :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCap7mFLGFHoR5wgqEhyrnrWY

III. Puissances

★ Définition

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel et a un réel, on note : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Exemple : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Utiliser la notation des puissances – Quatrième »
« Je possède un livre qui contient 100 000 000 000 000 de poèmes »

★ Propriétés

m et n sont des entiers, a et b sont des réels avec b non nuls :

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}} \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Exemple : $3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Puissance et exposant : règles de calcul »
« Utiliser les puissances d'exposant négatif – Quatrième »
« EXERCICE : Appliquer les formules sur les puissances - Quatrième »

Calculs de fractions

I. Écritures d'une fraction

★ **Définition**

Un nombre en écriture fractionnaire (pour simplifier : une fraction) est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$. a s'appelle le numérateur et b s'appelle le dénominateur.
L'ensemble des nombres fractionnaires se nomme $\mathbb{Q}$ (comme quotient).

Remarques :

- Un nombre entier est également une fraction. Par exemple, $2=\frac{2}{1}$. On a donc $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.
- Un nombre décimal est également une fraction. Par exemple, $0,51=\frac{51}{100}$.
- Il existe des fractions qui ne sont ni des entiers, ni des décimaux (comme $\frac{1}{3}$, par exemple).

★ Infinitude des écritures

Une fraction possède une infinité d'écritures fractionnaires. Par exemple, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\ldots$

★ Relation entre les écritures

$$\boxed{\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}}$$

★ Simplification d'écriture

Exemple : $\frac{30}{24}=\frac{5\times 6}{4\times 6}=\frac{5}{4}$.

Ici, on ne peut plus « simplifier ». On dit que l'écriture $\frac{5}{4}$ est *irréductible*.

★ **Réduction au même dénominateur**

Exemple : il est possible de *réduire au même dénominateur* $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 4 (le dénominateur de la deuxième) et de multiplier le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction par 3 (le dénominateur de la première).

Ainsi : $\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}$ et $\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$.

Remarque :
Cette technique, importante, permettra d'effectuer des additions ou des soustractions, et permet aussi de comparer deux fractions (pour savoir, par exemple, qui est la plus grande sans calculatrice).

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Modifier une fraction - Sixième »
« Modifier une fraction - Cinquième »
« Simplifier une fraction - Sixième »
« Simplifier une fraction - Cinquième »
« EXERCICE : Modifier une fraction - Sixième »

II. Multiplication de deux fractions

★ **Règle :**

La multiplication de fractions est la seule opération « naturelle » pour les élèves :

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

Autrement dit, on a multiplié les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple :
$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.

Remarque :
Il est parfois plus judicieux de simplifier <u>avant</u> d'effectuer.

Exemple :

$\frac{4}{3}\times\frac{27}{8}=\frac{4\times27}{3\times8}=\frac{108}{24}=\frac{54\times2}{12\times2}=\frac{54}{12}=\frac{9\times6}{2\times6}=\frac{9}{2}$ est un calcul parfaitement exact.

Mais il aurait été beaucoup plus subtil de simplifier avant d'effectuer :

$\frac{4}{3}\times\frac{27}{8}=\frac{4\times27}{3\times8}=\frac{4\times9\times3}{3\times4\times2}=\frac{9}{2}$ (on a simplifié par 3 et par 4 avant de calculer).

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Effectuer des multiplications de fractions (1) - Quatrième »
« Effectuer des multiplications de fractions (2) - Quatrième »
« Effectuer des multiplications de fractions - avec relatifs – Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des multiplications de fractions - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des multiplications de fractions - avec relatifs - Quatrième »

III. Division de deux fractions

★ Inverse d'un nombre, d'une fraction

Deux nombres sont inverses lorsque leur produit est égal à 1.

L'inverse d'un nombre a est $\frac{1}{a}$ (car $a\times\frac{1}{a}=\frac{a}{1}\times\frac{1}{a}=1$).

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

★ Règle :

La division est la deuxième opération la plus facile après la multiplication. Elle repose sur la propriété : « diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse ».

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}$$

Exemple :

$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Déterminer l'inverse d'un nombre - Quatrième »
« Effectuer des divisions de fractions - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des divisions de fractions - Quatrième »

IV. Additions et soustractions de fractions

★ **Règle :**

L'addition et la soustraction sont les opérations de fractions les plus difficiles sauf si les deux nombres ont le même dénominateur. Dans ce cas, la règle est :

$$\boxed{\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}}$$

Attention : ***le dénominateur reste le même***.

Exemples :

$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$ et $\frac{3}{11}-\frac{8}{11}=-\frac{5}{11}$

Vidéo :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Effectuer une addition ou une soustraction de fractions de même dénominateur - Sixième »

★ **Cas général :**

Dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où les deux fractions n'ont pas le même dénominateur, il est nécessaire, d'abord, de les réduire au même dénominateur (voir **I.**).

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Effectuer des additions et soustractions de fractions (1) - Quatrième »
« Effectuer des additions et soustractions de fractions (2) - Quatrième »
« Effectuer des additions et soustractions de fractions - avec relatifs (1) - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des additions et soustractions de fractions - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des additions ou soustractions de fractions - avec relatifs - Quatrième»

Calculs algébriques

I. Calcul algébrique / littéral

★ C’est vers le XVIe siècle que l’on voit avec le calcul algébrique, apparaître les mathématiques « modernes ». Auparavant il n’était pratiqué que le calcul numérique ou l’algèbre chaloupée (écrite en langue commune).
Le calcul algébrique combine lettres et nombres, et des opérations.
La grande différence entre le calcul numérique et le calcul algébrique est que le premier a pour but de ne donner qu'un résultat particulier alors que le second permet de trouver une formule générale, ou de démontrer, par exemple.

Vidéo :

Dans Youtube, sur la chaîne d’Yvan Monka, rechercher :
« Exprimer EN FONCTION DE... - Cinquième »
« Réduire une expression - Quatrième »
« EXERCICE : Réduire une expression - Quatrième »

II. Développer et réduire

★ **Principe**

Développer, c’est transformer un produit en une somme ou une différence.
Réduire une expression, c'est regrouper les termes « semblables » et effectuer les calculs.

Exemple de réduction :
$2b+5a+5-5b+a-3=6a-3b+2$ (on a regroupé les a avec les a, les b avec les $b\dots$)

★ **Règles du développement**

$$ab=ba\text{, c'est-à-dire, } a\times b=b\times a.$$

$$k(a+b)=ka+kb \text{ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)}$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \text{ (double distributivité)}$$

Exemples :

① $2(3x+5)=6x+10$.

② $-x(2x-3)=-2x^2+3x$.

③ $(x+1)(x+2)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2$.

④ $(2x-1)(3x-2)=6x^2-4x-3x+2=6x^2-7x+2$.

Vidéos : ***il est nécessaire de beaucoup s'entraîner***

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Simplifier une expression (1) - Cinquième »
« Simplifier une expression (2) - Cinquième »
« EXERCICE : Simplifier une expression - Cinquième »
« Appliquer la formule de distributivité - Quatrième »
« Développer une expression (Niv.1) - Quatrième »
« Développer une expression (Niv.2) - Quatrième »
« EXERCICE : Développer une expression - Quatrième »
« Développer et réduire une expression - Quatrième »
« EXERCICE : Développer et réduire une expression - Quatrième »
« LE COURS : Développements - Troisième »
« Développer en utilisant la distributivité - Troisième »
« Développer en utilisant la double distributivité (1) - Troisième »
« Développer en utilisant la double distributivité (2) - Troisième »
« EXERCICE : Développer une expression - Troisième »

★ Les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

① $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

② $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

③ $(x-6)(x+6) = x^2 - 36$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Développer en utilisant les identités remarquables - Troisième »
« Développer à l'aide de l'identité remarquable (a-b)(a+b)=a²-b² »
« Développer une expression complexe - Troisième »
« Développer une expression - Seconde »
« Utiliser les identités remarquables - Seconde »

III. Factoriser

★ Principe

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en produit.
En mathématiques, un facteur est un élément qui compose un produit (on parle de produit de facteurs). Par exemple, le produit 2×3 comporte deux facteurs : 2 et 3.

★ Règles de factorisation

Il suffit d'appliquer les égalités du paragraphe précédent « de droite à gauche ».

$$ka+kb=k(a+b)$$

Exemples :

① $5x+25=5(x+5)$.

② $x^2-3x=x(x-3)$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Factoriser une expression (Niv.1) - Quatrième »
« Factoriser une expression (Niv.2) - Quatrième »
« EXERCICE : Factoriser une expression - Quatrième »
« LE COURS : Factorisations - Troisième »
« Factoriser en reconnaissant un facteur commun (1) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser en reconnaissant un facteur commun (1) - Troisième »
« Factoriser en reconnaissant un facteur commun (2) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser en reconnaissant un facteur commun (2) - Troisième »
« Factoriser avec facteur commun - Seconde »

★ Les identités remarquables

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Factoriser à l'aide de l'identité remarquable a²-b²=(a-b)(a+b) »
« Factoriser en utilisant les identités remarquables (1) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser et développer en utilisant les identités remarquables - Troisième »
« Factoriser en utilisant les identités remarquables (2) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser en utilisant les identités remarquables (2) - Troisième »
« QCM : Les factorisations - Troisième »
« Factoriser avec une identité remarquable - Seconde »
« EXERCICE : Factoriser avec une identité remarquable - Seconde »

★ **Réduction au même dénominateur**

Réduire au même dénominateur deux fractions revient à effectuer une factorisation.

Exemple :

① $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x\times 3+1\times 2}{2\times 3}=\frac{3x+2}{6}$. C'est comme si on factorisait par $\frac{1}{6}$ car $\frac{3x+2}{6}=\frac{1}{6}(3x+2)$.

② $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1\times(x+1)-1\times x}{x\times(x+1)}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Réduire au même dénominateur - Seconde »
« EXERCICE : Réduire au même dénominateur - Seconde »
« QCM : Le calcul algébrique - Seconde »

Équations et inéquations

I. Équations

★ Notion d'égalité

Une égalité est une écriture mathématique qui s'écrit avec le signe « = » séparant deux expressions.
Une égalité est vraie ou fausse.

Exemples :
① $5-2=4$.
② $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
L'égalité ① est évidemment fausse tandis que l'égalité ② est vraie.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Tester une égalité - Cinquième »
« EXERCICE : Tester une égalité - Cinquième »

★ Notion d'équation

Une équation est une égalité dans laquelle un (ou plusieurs) terme(s) n'est (ne sont) pas connu(s). Le terme qui n'est pas connu est remplacé par une lettre et appelé : l'inconnue.

Exemples :
① $2+x=5$.
② $y^2+y-2=0$.

★ **Résoudre une équation**

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue, si elles existent, pour que l'égalité soit vraie.
Lorsque c'est le cas, on dit alors que le nombre cherché est une solution de l'équation.

Exemples :
① Si on remplace x par 3, l'équation $2+x=5$ est vérifiée. 3 est solution de l'équation.
② Si on remplace y par 1, l'équation $y^2+y-2=0$ est vérifiée. 1 est solution de l'équation.
On peut se poser la question de savoir s'il y a d'autres solutions. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Vérifier si un nombre est solution d'une équation - Quatrième »
« EXERCICE : Vérifier si un nombre est solution d'une équation - Quatrième »

★ Méthode de résolution : addition et soustraction

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité ne modifie pas l'égalité.

Exemples :

① On souhaite résoudre l'équation : $x-3=5$.

$x-3=5$
$\Leftrightarrow$ $x-3+3=5+3$ // on a ajouté 3 aux deux membres (question : pourquoi 3 ?)
$\Leftrightarrow$ $x=8$

En pratique, on écrit :

$x-3=5$
$\Leftrightarrow$ $x=5+3=8$

② On souhaite résoudre l'équation : $x+5=-2$.

$x+5=-2$
$\Leftrightarrow$ $x+5-5=-2-5$ // on soustrait 5 aux deux membres (question : pourquoi 5 ?)
$\Leftrightarrow$ $x=-7$

En pratique, on écrit :

$x+5=-2$
$\Leftrightarrow$ $x=-2-5=-7$

③ On souhaite résoudre l'équation : $2x+1=x+3$.

$2x+1=x+3$
$\Leftrightarrow$ $2x-x=3-1$
$\Leftrightarrow$ $x=2$

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Résoudre une équation (1) - Troisième »

★ Méthode de résolution : multiplication et division

Multiplier ou diviser par un même nombre les deux membres d'une égalité ne modifie pas l'égalité.

Exemples :

① On souhaite résoudre l'équation : $2x = 8$.

$$2x = 8$$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{2} = \dfrac{8}{2}$ // on divise par 2 les deux membres (question : pourquoi 2 ?)

$\Leftrightarrow \quad x = 4$

En pratique, on écrit :

$$2x = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{2} = 4$$

② On souhaite résoudre l'équation : $\dfrac{x}{3} = 4$.

$$\frac{x}{3} = 4$$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{3} \times 3 = 4 \times 3$ // on multiplie par 3 les deux membres (question : pourquoi 3 ?)

$\Leftrightarrow \quad x = 12$

En pratique, on écrit :

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 4 \times 3 = 12$$

Vidéos : ***chapitre qui nécessite de l'entraînement***

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Résoudre une équation (2) - Troisième »
« Résoudre une équation (3) - Troisième »
« Résoudre une équation (4) - Troisième »
« Résoudre une équation (5) - Troisième »
« EXERCICE : Résoudre une équation - Troisième »
« Résoudre une équation contenant des fractions - Troisième »
« Résoudre une équation - Seconde »
« EXERCICE : Résoudre une équation - Seconde »

★ Équations produit

Une équation produit est une équation de la forme $A\times B=0$.

On a : $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$.

Exemple : on souhaite résoudre l'équation $(2x+1)(3x-1)=0$.

$(2x+1)(3x-1)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0$ ou $3x-1=0$.

Dès lors :

$$\begin{array}{lllll} & & 2x+1=0 & & 3x-1=0 \\ & \Leftrightarrow & 2x=-1 & \Leftrightarrow & 3x=1 \\ & \Leftrightarrow & x=-\dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & x=\dfrac{1}{3} \end{array}$$

L'équation possède deux solutions : $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« LE COURS : Les équations - Troisième »
« Résoudre une équation-produit - Troisième »
« Résoudre une équation-produit (1) - Seconde »
« EXERCICE : Résoudre une équation-produit - Troisième »
« EXERCICE : Développer, factoriser une expression - Seconde »

II. Inéquations

★ Notion d'inéquation

Une inéquation est une inégalité entre deux expressions dans laquelle un (ou plusieurs) terme(s) n'est (ne sont) pas connu(s). Un des 4 symboles suivant est utilisé : $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$.

★ Méthode de résolution :

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne modifie pas le sens de l'égalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre ***positif*** les deux membres d'une inégalité ne modifie pas le sens de l'égalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre ***négatif*** les deux membres d'une inégalité inverse le sens de l'égalité.

Exemples :

① On souhaite résoudre l'inéquation : $-2x \geq 4$.

$-2x \geq 4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{4}{-2}$ // on a inversé le sens de l'inégalité car on a divisé par -2 qui est négatif

$\Leftrightarrow \quad x \leq -2$

② On souhaite résoudre l'équation : $2x+5 \geq 0$.

$2x+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x \geq -5$ // on soustrait 5 aux deux membres : le sens n'est pas modifié

$\Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{-5}{2}$ // on divise par 2 qui est positif : le sens n'est pas modifié

③ On souhaite résoudre l'équation : $-3x+4<-x+2$.

$-3x+4<x+2$

$\Leftrightarrow \quad -3x+x<2-4$ // on ajoute x et on soustrait 4 : le sens n'est pas modifié

$\Leftrightarrow \quad -2x<-2$

$\Leftrightarrow \quad x>\dfrac{-2}{-2}$ // on divise par -2 qui est négatif : on inverse le sens

$\Leftrightarrow \quad x>1$

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« LE COURS : Les inéquations - Troisième »
« Effectuer des opérations sur les inégalités – Troisième »
« Résoudre une inéquation - Troisième »
« Résoudre une inéquation - Seconde »
« EXERCICE : Résoudre une inéquation - Troisième »

Notion de fonction

I. Notion de fonction

★ Définition :

$\mathcal{D}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.
Une fonction associe à chaque réel *x* de l'ensemble de départ $\mathcal{D}$, un réel et un seul *y*, appelé l'image de *x*. $\mathcal{D}$ est appelé ensemble de définition de la fonction.

★ Notations :

- Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres *f*, *g*, *h*....
- L'image d'un réel *x* de $\mathcal{D}$ par la fonction *f* est notée aussi $f(x)$ (lire : "*f* de *x*"). On a donc : $y = f(x)$.
- Au lieu d'écrire "*f* est la fonction qui à *x* associe $f(x)$" on peut écrire "$f : x \mapsto f(x)$".

★ Trois façons de définir une fonction :

- Avec un graphique (voir paragraphe **II.**).
- Avec un tableau :
  Par exemple, ce tableau définit une fonction *g* qui à chaque nombre de la 1re ligne associe un nombre de la 2e ligne.

Nombre x	0	1	2	3	4	5
Image $g(x)$	–5	–3	0	5,2	0	7

- Avec une formule (voir paragraphe **III.**).

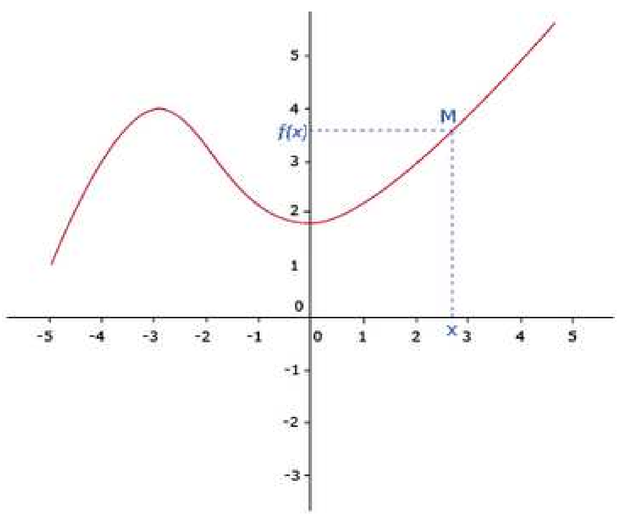
II. Courbe représentative d'une fonction (représentation graphique)

★ Définition :

f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Dans un repère, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction *f*, est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :

$$x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(x).$$

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$ dans ce repère.



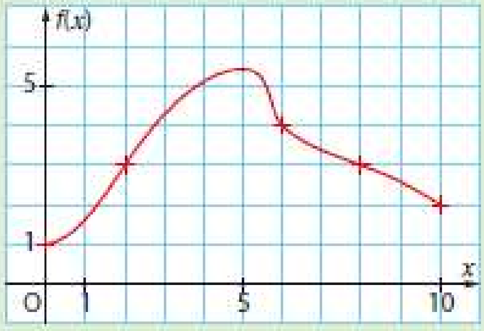
★ Lecture graphique d'image et d'antécédent(s) :

f est la fonction définie par le graphique ci-contre.

a. Lire l'image de 2, puis l'image de 5.

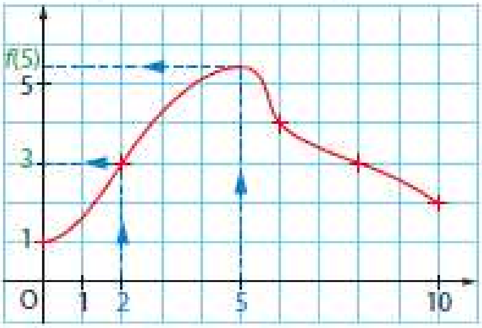
b. Lire les antécédents de 2.

c. Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent.



Solution

a. L'image de 2 est 3. Ainsi $f(2) = 3$.

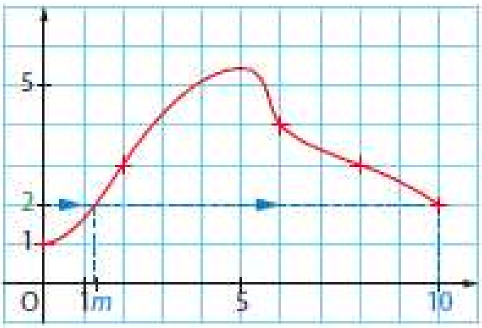


Méthode Pour lire l'image de 2 :
- on place 2 sur l'axe des abscisses ;
- on se déplace « verticalement » jusqu'à la courbe, puis « horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées ;
- ce trajet aboutit à 3 sur l'axe des ordonnées : c'est l'image de 2.

L'image de 5 est approximativement 5,5. Ainsi $f(5) \approx 5,5$.

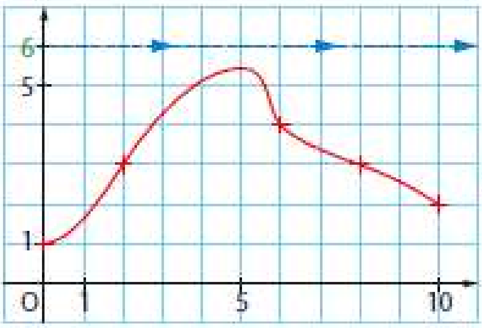
Le graphique ne permet pas de donner la valeur exacte de l'image de 5 : on lit une valeur approchée.

b. 2 a deux antécédents : 10 et un nombre m égal approximativement à 1,2.



Méthode Pour lire les antécédents de 2, c'est-à-dire les nombres dont l'image est 2 :
- on place 2 sur l'axe des ordonnées ;
- on se déplace « horizontalement » jusqu'à la courbe, puis « verticalement » jusqu'à l'axe des abscisses ;
- ce trajet aboutit à m et à 10 sur l'axe des abscisses : ce sont les antécédents de 2.

c. Le nombre 6 n'a pas d'antécédent.



À partir de 6 sur l'axe des ordonnées, on se déplace « horizontalement », mais ce trajet ne rencontre jamais la courbe.

III. Fonction définies par une formule (une expression)

★ Principe et premier exemple :

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-2\sqrt{x}$.

Cette phrase indique que l'ensemble de définition de cette fonction est $[0\,;+\infty[$ (on ne peut donc pas considérer des x négatifs) et que pour calculer l'image d'un nombre positif, on procède ainsi :

• image de 0 : $f(0)=0-2\sqrt{0}=0$

• image de 1 : $f(1)=1-2\sqrt{1}=1-2=-1$

★ **Calcul d'une image :**

Pour calculer une image, il suffit de **remplacer la variable** (en général notée $\boldsymbol{x}$) dans l'expression de $f(x)$.

f est la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
Calculer : **a.** $f(5)$ **b.** $f(-4)$

Solution

a. $f(5) = 3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 4$
$f(5) = 3 \times 25 - 10 + 4$
$f(5) = 75 - 10 + 4$
$f(5) = 69$

Méthode Pour calculer $f(5)$:
• on remplace x par 5 dans l'expression $3x^2 - 2x + 4$ en pensant à rajouter les signes $\times$ nécessaires ;
• on effectue le calcul en respectant les règles de priorité.

b. $f(-4) = 3 \times (-4)^2 - 2 \times (-4) + 4$
$f(-4) = 3 \times 16 + 8 + 4$
$f(-4) = 48 + 8 + 4$
$f(-4) = 60$

Lorsqu'on remplace x par -4, on pense à l'écrire entre parenthèses.

★ **Calcul, s'il existe, d'un antécédent :**

Pour déterminer, s'il existe, un antécédent, on cherche à résoudre l'équation $f(x)=y$ où y est l'image connue et où x est l'inconnue.

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.
Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 16 par la fonction f.

Correction

On note x un nombre dont l'image est 16.
x est solution de l'équation $f(x) = 16$ soit $3x - 5 = 16$.
$3x = 16 + 5 = 21$ donc $x = 21 \div 3 = 7$
$7 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
Donc, 7 est l'unique antécédent de 16 par la fonction f.

Vidéos sur tout le cours des fonctions :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Lire graphiquement une image et un antécédent - Troisième »
« EXERCICE : Lire graphiquement une image et un antécédent - Troisième »
« Déterminer une image et un antécédent dans un tableau - Troisième »
« EXERCICE : Déterminer une image et un antécédent dans un tableau - Troisième »
« Calculer une image par une fonction - Troisième »
« EXERCICE : Calculer une image par une fonction - Troisième »
« Compléter un tableau de valeurs - Troisième »
« Représenter graphiquement une fonction - Troisième »
« Déterminer un antécédent d'un nombre - Seconde »
« EXERCICE : Déterminer une image et un antécédent par une fonction - Seconde »