1 Expression littérale

Définition Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

EXEMPLES :

- L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ peut s'écrire $L \times \ell$.

On dit que l'on a **exprimé** l'aire du rectangle **en fonction de** L et ℓ.

- La longueur d'un cercle de rayon R peut s'écrire $2 \times \pi \times R$.

La lettre grecque π représente le nombre pi, la lettre R le rayon du cercle.

Règle On peut supprimer le signe $\times$:
- devant une lettre ;
- devant une parenthèse.

EXEMPLES :
- $5 \times x = 5x$
- $3 \times 2 \times y = 6 \times y = 6y$
- $7 \times (8 - a) = 7\,(8 - a)$

Remarques :
- Le produit 3×8 est égal à 24, il ne peut donc pas s'écrire 38 !
- L'expression littérale $5x$ est le produit de 5 par x. La multiplication n'a pas « disparue ».
- $1 \times c = 1\,c$, mais on écrit plus simplement $1 \times c = c$.
- On ne peut pas supprimer le signe $\times$ dans l'expression $y \times 4$, mais on a : $y \times 4 = 4 \times y = 4y$.

Notations a désigne un nombre.

$a \times a$ se note a^2 et se lit « a au carré ».

$a \times a \times a$ se note a^3 et se lit « a au cube ».

EXEMPLES :
- L'aire d'un carré de côté c est c^2.
- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

2 Développement d'un produit

Définition Lorsque l'on transforme un produit en une somme ou une différence, on dit que l'on **développe** le produit.

Propriété de distributivité

k, a et b désignent trois nombres.

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition et à la soustraction.

- $\underbrace{k \times (a + b)}_{\text{Produit}} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{Somme}}$
- $\underbrace{k \times (a - b)}_{\text{Produit}} = \underbrace{k \times a - k \times b}_{\text{Différence}}$ avec $a > b$

EXEMPLES :

- On a développé chaque expression numérique :

$12 \times (10 + 8) = 12 \times 10 + 12 \times 8$;

$17\,(3 - 0{,}2) = 17 \times 3 - 17 \times 0{,}2$.

- On a développé chaque expression littérale :

$7\,(x + 5) = 7 \times x + 7 \times 5 = 7x + 35$;

$4 \times (3 - a) = 4 \times 3 - 4 \times a = 12 - 4a$.

3 Factorisation d'une expression littérale

Définition Lorsque l'on transforme une somme ou une différence en un produit, on dit que l'on **factorise** la somme ou la différence.

Propriété de distributivité

k, a et b désignent trois nombres.

- $\underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{Somme}} = \underbrace{k \times (a + b)}_{\text{Produit}}$
- $\underbrace{k \times a - k \times b}_{\text{Différence}} = \underbrace{k \times (a - b)}_{\text{Produit}}$ avec $a > b$

EXEMPLES : On a factorisé chaque expression :

- $7{,}8 \times 5{,}25 + 7{,}8 \times 4{,}75 = 7{,}8 \times (5{,}25 + 4{,}75)$;
  7,8 est un facteur commun aux deux termes.
- $6r - 18 = 6 \times r - 6 \times 3 = 6 \times (r - 3)$.
  6 est un facteur commun aux deux termes.

Remarque : On peut parfois factoriser pour **réduire** une expression littérale.

EXEMPLES :

- $3x + 5x = 3 \times x + 5 \times x = (3 + 5) \times x = 8x$;
  x est un facteur commun aux deux termes.
- $6a - a = 6 \times a - 1 \times a = (6 - 1) \times a = 5a$.
  a est un facteur commun aux deux termes.

4 Notion d'égalité

Vocabulaire Une **égalité** est constituée de deux **membres** séparés par un signe $=$.

Propriété Une **égalité est vraie** lorsque ses deux membres ont la même valeur.

EXEMPLES :

- $\underbrace{5 \times 3}_{\text{1er membre}} = \underbrace{11 + 4}_{\text{2nd membre}}$
  Les deux membres ont la même valeur, c'est-à-dire 15.
  Cette égalité est toujours vraie.
- $\underbrace{5x + 2x}_{\text{1er membre}} = \underbrace{7x}_{\text{2nd membre}}$
  Pour toute valeur du nombre x, les deux membres ont la même valeur.
  Cette égalité est toujours vraie.

Remarque : Certaines égalités ne sont pas toujours vraies.

EXEMPLES : On considère l'égalité $2x + 5 = y - x$.

- Pour $x = 3$ et $y = 12$
  Premier membre : $2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$
  Second membre : $12 - 3 = 9$
  Les deux membres n'ont pas la même valeur.
  Donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 3$ et $y = 12$.
- Pour $x = 4$ et $y = 17$
  Premier membre : $2 \times 4 + 5 = 8 + 5 = 13$
  Second membre : $17 - 4 = 13$
  Les deux membres ont la même valeur.
  Donc l'égalité est vraie pour $x = 4$ et $y = 17$.

> À l'oral

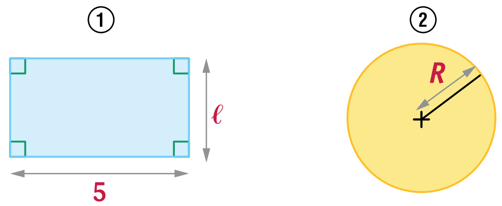
1 a désigne un nombre.
Exprimer en fonction de a :
a) son double ; **b)** sa moitié ; **c)** son triple ;
d) son tiers ; **e)** son carré ; **f)** son cube.

2 x désigne un nombre.
Exprimer en fonction de x :
a) la somme de x et de 3 ;
b) le produit de x par 7 ;
c) le produit de x par la somme de x et 9.

3 n désigne un nombre entier.
Exprimer en fonction de n :
a) un multiple de 3 ; **b)** un multiple de 12 ;
c) un nombre pair ; **d)** un nombre impair.

Un nombre impair suit toujours un nombre pair.

4 Toutes les longueurs sont en centimètres.
ℓ et R désignent des nombres.



Pour chaque figure, exprimer en fonction de ℓ ou R :
a) son périmètre ; **b)** son aire.

5 Lire chaque expression en supprimant le signe $\times$ quand c'est possible.
a) $3 \times x$; **b)** $x \times y$; **c)** 3×4 ;
d) $b \times 7$; **e)** $7 \times a \times b$; **f)** $3 \times a + 4 \times 6$.

6 Lire en utilisant les expressions « au carré » ou « au cube » quand c'est possible.
a) $a \times a$; **b)** $x \times x \times x + 5$;
c) $y + y$; **d)** $a \times a + a$.

7 SC1 Calculer chaque expression pour $x = 3$.
a) $8x + 3$; **b)** $24 - 7x$; **c)** $5(x + 8)$;
d) $x\,(14 - 2x)$; **e)** x^2 ; **f)** x^3.

8 SC1 Calculer l'expression $3a + 2b$ pour :
a) $a = 1$ et $b = 2$; **b)** $a = 2$ et $b = 1$;
c) $a = 3$ et $b = 7$; **d)** $a = 8$ et $b = 0$.

9 SC2

$$28 \times 101 = 28 \times 100 + 28$$

1) a) Justifier l'égalité ci-dessus.
b) Calculer mentalement 28×101.
2) Calculer mentalement 28×99.

10 SC2 Calculer.
a) 56×101 ; **b)** 56×99 ;
c) $5{,}6 \times 101$; **d)** $5{,}6 \times 1\,002$.

11 Développer chaque produit.
a) $7 \times (a + b)$; **b)** $2 \times (x - y)$;
c) $(4 + x) \times 3$; **d)** $c \times (3 - b)$.

12 Développer chaque produit.
a) $3(x + 5)$; **b)** $7(6 - y)$;
c) $7(a + 4)$; **d)** $m(m - 3)$.

13 SC2 Calculer astucieusement.
a) $8{,}1 \times 6 + 8{,}1 \times 4$;

J'ai factorisé par 8,1.

b) $7{,}248 \times 87 + 7{,}248 \times 13$;
c) $1{,}125 \times 96 - 0{,}125 \times 96$.

14 Factoriser chaque somme ou différence.
a) $2 \times x + 2 \times y$; **b)** $7 \times m - 7 \times 4$;
c) $5 \times b + a \times b$; **d)** $a \times 5 - a \times 3$.

15 Factoriser chaque somme ou différence.
a) $5x + 5y$; **b)** $14d - 5d$;
c) $18x - 18 \times 3$; **d)** $13 + 13a$.

16 Réduire chaque expression littérale.
a) $2x + 3x$; **b)** $17y - 9y$;
c) $15b + 3b - 7b$; **d)** $16a - 15a + 8a$.

17 Réduire si possible chaque expression.
a) $8x + 3x + 7$; **b)** $21y + 6$;
c) $12a - 11a + a$; **d)** $8b - 8$.

18 Tester l'égalité $4x + 7 = 13$ pour :
a) $x = 0$; **b)** $x = 1$; **c)** $x = 1{,}5$; **d)** $x = 2$.

19 Tester l'égalité $x + y = 11 - x$ pour :
a) $x = 3$ et $y = 5$; **b)** $x = 6$ et $y = 1$.

1 J'APPRENDS À… Utiliser la propriété de distributivité

Énoncé : **1)** Développer $A = 5\,(7 + x)$ et $B = (a - 9) \times 8$.
2) Factoriser $C = 4 \times a + 4 \times b$ et $D = ab - 3b$.

Solution :

1) $A = 5(7 + x)$

$A = 5 \times (7 + x)$

$A = 5 \times 7 + 5 \times x$

$A = 35 + 5x$

Je distribue 5 à 7 puis à x.

$B = (a - 9) \times 8$

$B = a \times 8 - 9 \times 8$

$B = 8a - 72$

Je simplifie l'expression obtenue.

2) $C = 4 \times a + 4 \times b$

$C = 4 \times (a + b)$

$C = 4(a + b)$

4 est un facteur commun à 4 × a et à 4 × b.

$D = ab - 3b$

$D = a \times b - 3 \times b$

$D = (a - 3) \times b$

$D = (a - 3)\,b$

b est un facteur commun à a × b et à 3 × b.

> J'APPLIQUE.

20 SC2 Calculer de deux façons différentes chaque expression numérique.

a) $5 \times (9 + 12)$; **b)** $9 \times (7 - 4)$;
c) $2 \times (10 - 3)$; **d)** $(15 + 9) \times 6$.

21 SC2 Calculer astucieusement.

a) 87×101 ; **b)** 999×32 ;
c) $12 \times 15{,}3$; **d)** $98 \times 2{,}4$.

22 Recopier les deux colonnes ci-dessous.
Relier chaque expression littérale de la colonne bleue à l'expression développée de la colonne jaune, qui lui est égale.

$9(7 + x)$ •	• $63 - 9x$
$7(x - 9)$ •	• $7x + 63$
$(x + 9) \times 7$ •	• $63 + 9x$
$(7 - x) \times 9$ •	• $7x - 63$

23 Développer chaque produit.

a) $8 \times (6 + x)$; **b)** $7 \times (5 - a)$;
c) $x \times (12 - y)$; **d)** $(15 + b) \times a$.

24 Pour chacune des expressions suivantes, préciser si elle est égale à $12x + 18$.
Justifier la réponse.

a) $12(x + 18)$; **b)** $3(4x + 6)$;
c) $6(2x + 3)$; **d)** $(3x + 2) \times 6$.

25 Développer puis simplifier chaque expression.

a) $7 \times (m + 8)$; **b)** $9(x - 8)$;
c) $(15 + b) \times a$; **d)** $n(n - 16)$.

26 SC2 Calculer de deux façons différentes chaque expression numérique.

a) $5 \times 4 + 5 \times 6$; **b)** $7 \times 8 - 6 \times 8$;
c) $7 \times 4 - 7 \times 3$; **d)** $9 \times 11 - 9 \times 9$.

27 SC2 Pablo achète 1,3 kg de poireaux à 2,10 € le kg et 1,3 kg de carottes à 1,80 € le kg.

1) Écrire une expression qui permet de calculer le montant de ses achats.
2) Calculer de deux façons différentes ce montant.

28 SC2 Factoriser chaque expression numérique puis la calculer.

a) $5 \times 82 + 5 \times 18$; **b)** $12 \times 17 + 3 \times 12$;
c) $142 \times 4{,}25 - 42 \times 4{,}25$.

29 SC2 Calculer astucieusement.

a) $17 \times 72 + 17 \times 28$; **b)** $11{,}5 \times 4{,}6 - 1{,}5 \times 4{,}6$;
c) $121 \times 4{,}01 - 4{,}01 \times 21$;
d) $1{,}005 \times 8{,}5 + 3{,}995 \times 8{,}5$.

30 Factoriser chaque expression littérale.

a) $12 \times x + 12 \times y$; **b)** $7 \times x - 4 \times x$;
c) $a \times 7 + 7 \times b$; **d)** $m \times 12 - 5 \times m$.

31 Factoriser chaque expression littérale.

a) $7x + 7y$; **b)** $5x - 3x$;
c) $an + bn$; **d)** $12m - xm$.

Développer un produit

53 SC2 Louane calcule mentalement 27×12.

$27 \times 12 = 27 \times (10 + 2)$
$27 \times 12 = 27 \times 10 + 27 \times 2$
$27 \times 12 = 270 + 54 = 324$

En utilisant la méthode de Louane, calculer :
a) 102×38 ; **b)** 21×35 ;
c) 99×75 ; **d)** $98 \times 2{,}5$.

54 On a demandé à deux élèves de développer l'expression $2(x + 3)$. Voici leurs copies :

Jacke

$\cancel{2(x + 3) = 2x + 3}$
faux

Emma

$\cancel{2(x + 3) = 2x + 5}$
faux

Ces deux élèves se sont trompés.
1) Expliquer l'erreur de chacun.
2) Développer l'expression $2(x + 3)$.

55 Dans chaque cas, développer si possible :
a) $2{,}5 \times (8 + m)$; **b)** $3 \times (5x + 2)$;
c) $x\,(12 - x)$; **d)** $4 + (y + 3{,}2)$;
e) $(7x - b) - 9$; **f)** $(6{,}1 + 4a) \times 2$.

Factoriser une somme ou une différence

56 SC2 Calculer astucieusement.
a) $19 \times 43{,}5 + 19 \times 56{,}5$;
b) $16{,}7 \times 69 - 6{,}7 \times 69$;
c) $13 \times 5{,}4 + 8{,}1 \times 13 - 3{,}5 \times 13$.

57 SC2 Calculer astucieusement.
a) $32 \times 42 + 32 \times 58$;
b) $17{,}5 \times 1002 - 2 \times 17{,}5$;
c) $9{,}2 \times 199 + 9{,}2$; **d)** $0{,}78 \times 101 - 0{,}78$.

58 Factoriser chaque expression littérale.
a) $3 \times a + 3 \times b$; **b)** $5 \times a - 3 \times a$;
c) $6 \times 5 + x \times 5$; **d)** $12 \times m - p \times 12$.

59 Factoriser chaque expression littérale.
a) $19x + 19y$; **b)** $28a - 9a$;
c) $2ab + ac$; **d)** $xy - 4x$.

60 Pour chaque expression littérale, la développer ou la factoriser selon le cas.
a) $5(x + 6)$; **b)** $5m + 5p$;
c) $(a - b) \times 2$; **d)** $4a - b \times 4$.

Réduire une expression littérale

61 Réduire chaque expression littérale.
a) $2x + 4x$; **b)** $4y + 5y$;
c) $15m - 8m$; **d)** $21a - a$.

62 Réduire chaque expression littérale.
a) $8a - 2a$; **b)** $12b + 4b - 3b$;
c) $5x + x$; **d)** $9y - 2y + 7y$.

63 Réduire chaque expression littérale.
a) $8x + 7x + 6$; **b)** $17m - 11m + 8 - 5$;
c) $4a + 12a + 9$; **d)** $3m + m + 1 + 4$.

64 Réduire lorsque cela est possible.
a) $9x + 8$; **b)** $9x + 8x$; **c)** $5a + 5a$;
d) $7y - 6$; **e)** $7a - 6a$; **f)** $5a + 5b$.

Tester une égalité

65 **1)** Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x	1	2	3	4	5	6
$11x - 10$						
$x(x + 4)$						

2) Pour quel(s) nombre(s) entier(s) compris entre 1 et 6, l'égalité $11x - 10 = x(x + 4)$ est-elle vraie ?

66 On cherche tous les nombres entiers x et y inférieurs à 11 qui vérifient l'égalité : $4x + 1 = 3y + 7$.
1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2		9	10
$4x + 1$						

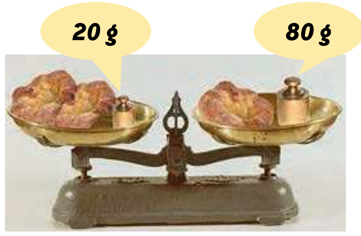
2) Recopier et compléter le tableau suivant :

y	0	1	2		9	10
$3y + 7$						

3) En déduire tous les nombres entiers x et y inférieurs à 11 qui vérifient l'égalité $4x + 1 = 3y + 7$.

J'ai trouvé 3 réponses.

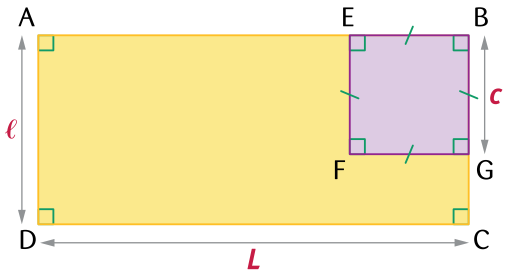
67 Des croissants ont la même masse m (en g).



1) Écrire une égalité traduisant l'équilibre de la balance ci-contre.
2) Tester cette égalité pour des valeurs de m judicieusement choisies entre 30 et 80.
3) Proposer une valeur pour la masse d'un croissant.

> J'approfondis

78



Les longueurs sont exprimées en centimètres.
Pour chacune des expressions littérales suivantes, préciser ce qu'elle permet de calculer.

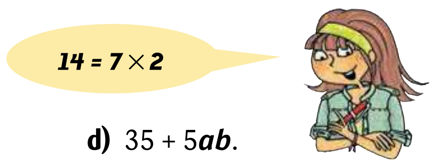
a) $\ell \times L$; **b)** $2(\ell + L)$; **c)** c^2 ;
d) $4c$; **e)** $L - c$; **f)** $L\ell - c^2$.

79 Développer puis réduire.

a) $2(x + 3) + 5$; **b)** $13 + 5(3 - x)$;
c) $7y + 9(y - 2)$; **d)** $6(a + 1) + 8(3 + a)$.

80 Factoriser chaque expression littérale.

a) $7x + 14$;



b) $9y - 27$;
c) $x^2 - 2x$; **d)** $35 + 5ab$.

81 Factoriser chaque expression littérale.

a) $8x + 8$;
b) $27a + 9$;

8 = 8 × 1

c) $35 - 7x$; **d)** $m - 2m^2$; **e)** $6y^2 + 6y$.

82 Thaïs et Capucine choisissent le même nombre.

• Thaïs calcule son carré et ajoute au résultat le double du nombre qu'elle a choisi.
• Capucine ajoute 2 au nombre de départ et multiplie le résultat par le nombre choisi.

1) Quels résultats obtiennent Thaïs et Capucine lorsqu'elles choisissent 5 comme nombre de départ ? Justifier chaque réponse.
2) Choisir un autre nombre de départ et calculer les résultats obtenus par Thaïs et Capucine.
3) Justifier pourquoi Thaïs et Capucine obtiennent toujours le même résultat quel que soit le nombre choisi au départ.

83 Démontrer que le double de la somme de deux nombres est égal à la somme des doubles de chacun de ces deux nombres.

84 Démontrer que le carré de la somme de deux nombres n'est pas égal à la somme des carrés de chacun de ces deux nombres.

85 Les dimensions d'une barrique bordelaise sont :

$D = 0{,}7$ m
$d = 0{,}565$ m
$L = 0{,}95$ m

Les trois formules suivantes permettent de calculer le volume de cette barrique :

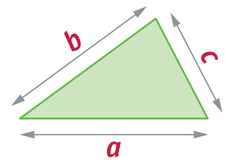
Formule de l'an II : $\mathcal{V} = \dfrac{\pi L}{36}(2D + d)^2$

Formule de Dez : $\mathcal{V} = \pi L\left(\dfrac{5D + 3d}{16}\right)^2$

Formule de Kepler : $\mathcal{V} = \dfrac{\pi L}{12}(2D^2 + d^2)$

• Pour chacune des trois formules, calculer une valeur approchée du volume de la barrique bordelaise.

86 On considère un triangle de longueur de côtés (en cm) a, b et c.



1) a) Construire ce triangle pour $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$.
b) L'égalité $a^2 = b^2 + c^2$ est-elle vraie pour $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$? Justifier la réponse.
2) a) Construire ce triangle pour : $a = 5$, $b = 4$ et $c = 3$.
b) L'égalité $a^2 = b^2 + c^2$ est-elle vraie pour $a = 5$, $b = 4$ et $c = 3$? Justifier la réponse.
c) Quelle semble être alors la nature de ce triangle ?

87 **1)** On donne $A = 5x + 2x$ et $B = 6x + x$.

a) Calculer A et B pour $x = 1$, puis pour $x = 2$.
b) Que remarque-t-on ?
c) Démontrer que l'égalité $A = B$ est vraie pour n'importe quelle valeur de x.

2) On donne $C = x(x - 1)$ et $D = 2x - 2$.

a) Calculer C et D pour $x = 1$, puis pour $x = 2$.
b) Que remarque-t-on ?
c) Démontrer que l'égalité $C = D$ n'est pas vraie pour n'importe quelle valeur de x.

88 Exprimer en fonction de π :

a) le périmètre de la figure orange ;
b) l'aire de la figure orange.