Exercices

Sans crayon, sans calculatrice

Le plan est muni d'une repère orthonormé (O ; I, J).

1 Soit $g(x) = x^3 + \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
Calculer $g'(x)$.

2 Soit $h(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.
Calculer $h'(x)$.

3 Soit $k(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $k'(x)$.

4 Soit $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
Résoudre $f'(x) = 0$.

5 Résoudre $(x-2)(x+4) > 0$.

6 Soit $g : x \mapsto 3x^3 + 16x - 15$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer le sens de variation de g.

7 Déterminer les réels a et b tels que :
a. $(x+3)(ax+b) = 2x^2 + 5x - 3$;
b. $(2x+a)(bx-3) = 2x^2 - 8x + 6$;
c. $(2x+a)(x+2) = 2x^2 + bx + 6$.

8 Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{x} + 5x^2 - 4x$ en A(1 ; 2).

9 Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$. Déterminer x tel que les droites (AB) et (AC) soient orthogonales en A.

10 Donner une équation cartésienne de la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ passant par l'origine O du repère.

11 Déterminer $\sin t$ sachant que $\cos t = -\dfrac{1}{2}$ et que $t \in [\pi\,; 2\pi]$.

12 Une variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante

x_i	-2	0	1
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{3}$

Calculer l'espérance mathématique de X.

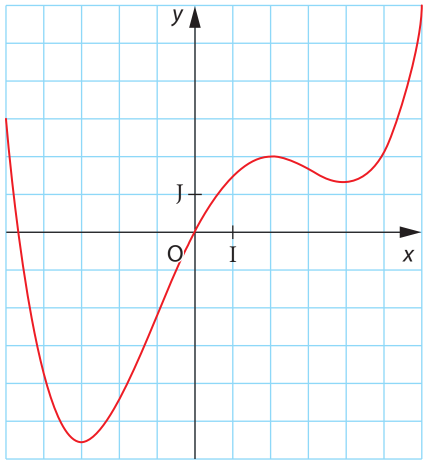
13 Une variable aléatoire X a pour espérance 2 et pour variance 1,2. Quelles sont l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y définie par $Y = -2X$?

Entraînement

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I, J).

Du sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée

14 Voici la courbe représentative de la fonction f définie et dérivable sur $[-5\,;6]$.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
1. Combien de fois la dérivée de la fonction f s'annule-t-elle sur $[-5\,;6]$?
2. Donner le signe de $f'(-1)$ et celui de $f'(3)$.
3. Comparer $f'(-4)$ et $f'(-1)$; $f'(-5)$ et $f'(5)$.

15 La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et admet le tableau de variation suivant :

x	-10		-3		0		10
$f(x)$	-8	↗	2	↘	-1	↗	0

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(-3)$? $f(-1)$ et $f(5)$? $f(-5)$ et $f(6)$?
3. Quel est le signe de $f'(x)$ sur $[-10\,;-3]$? sur $[-3\,;0]$? sur $[0\,;10]$? Justifier.

Aide : exercices résolus 1 et 5

16 La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et admet ce tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(0)$? $f(-0{,}5)$ et $f(4)$? $f(-2)$ et $f(3)$?

3. Quel est le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$?

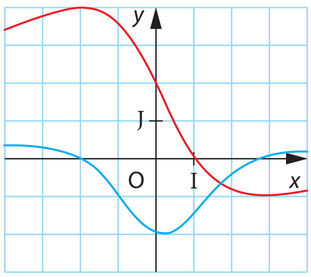
↘ Aide : exercices résolus 1 et 5

17 **Qui est qui ?**

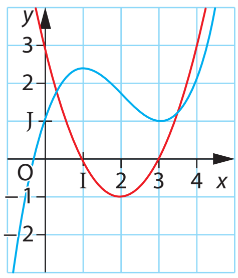
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f et celle de sa dérivée f'.

Retrouver la courbe de f et celle de f'. Justifier.

a.

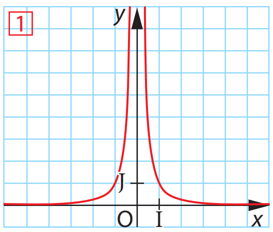


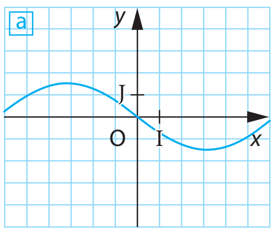
b.

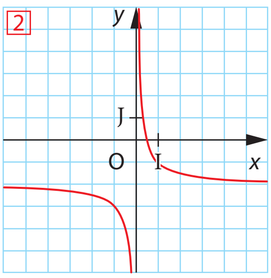


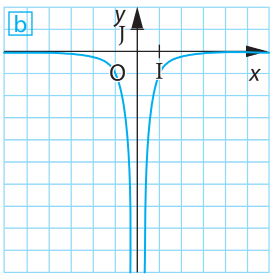
18 On donne les courbes de quatre fonctions en rouge et celles de leurs dérivées en bleu.

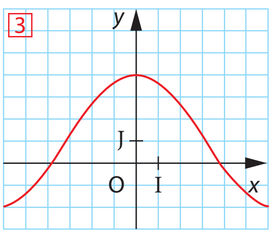
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.

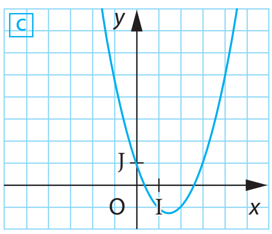


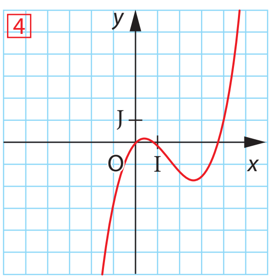


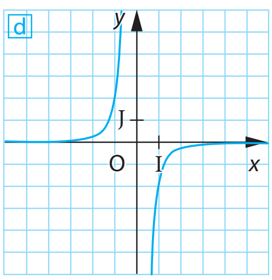












Étudier le sens de variation d'une fonction

Pour les exercices 19 à 25, calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation complet de f.

19 **a.** $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

↘ Aide : exercice résolu 3

20 **a.** $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

↘ Aide : exercice résolu 3

21 **a.** $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 4x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

22 **a.** $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

b. $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

23 **a.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

b. $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

24 **a.** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 3}$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\,;3\}$.

25 **a.** $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{2x+4}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b. $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

26 **Avec ou sans dérivée ?**

Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sqrt{3x-4}$ pour $x \geqslant \dfrac{4}{3}$.

b. $f(x) = -\dfrac{2}{3x+4}$ pour $x \neq -\dfrac{4}{3}$.

27 Même énoncé que l'exercice **26**.

a. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{4-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

28 Même énoncé que l'exercice **26**.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ sur $[0\,;+\infty[$.

Exercices

29 **Bien interpréter un écran de calculatrice**

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + \dfrac{35}{12}x + \dfrac{1}{12}$ sur $\mathbb{R}$.

1. a. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ sur l'écran d'une calculatrice pour $-2 \leqslant x \leqslant 4$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$.

b. Lire graphiquement le sens de variation de f.

2. a. Calculer $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de f.

b. Que peut-on en conclure quant à la question 1 ?

c. Si on prend pour la fenêtre d'affichage Xmin = 0,5 et Xmax = 1,5, quelles valeurs de Ymin et Ymax peut-on choisir pour observer sur le graphique les résultats de la question **2a** (expliquer votre raisonnement) ?

Aide : exercice résolu 2

Utiliser le sens de variation

30 **Sans dériver**

Le carré ABCD a pour côté 10. Les points M, N, P, Q appartiennent respectivement à [AB], [BC], [CD] et [DA] et sont tels que AM = BN = CP = DQ = x, où x appartient à [0 ; 10]. On note $P(x)$ le périmètre du carré MNPQ.

1. Exprimer $P(x)$ en fonction de x.

2. Étudier le sens de variation de P sur [0 ; 10].

3. Justifier que $20\sqrt{2} \leqslant P(x) \leqslant 40$ pour tout x de [0 ; 10].

Aide : exercice résolu 7

31 **Tableau de variation et équations**

La fonction f est celle de l'exercice **15**.

1. Donner le nombre de solutions des équations :

a. $f(x) = 1$ **b.** $f(x) = 2$ **c.** $f(x) = 5$

d. $f(x) = -6$ **e.** $f(x) = 0$

2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de m.

32 **Tableau de variation et signe**

La fonction f a le tableau de variation suivant :

x	-8		-3		0		10
$f(x)$	-3	↗	2	↘	-5	↗	-1

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions que l'on appellera α et β ($\alpha < \beta$).

2. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Aide : exercice résolu 4

33 Soit g le fonction définie et dérivable sur [– 10 ; 10] telle que $g(x) = x^3 - 12x$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g.

2. Donner un encadrement de $g(x)$ pour :

a. x appartenant à [– 5 ; 2] ; **b.** x appartenant à [– 2 ; 5].

3. Soit m un réel tel que $m \in [-65 ; 65]$.
Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation $g(x) = m$ admet exactement 1 solution ?

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 2.$$

1. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$.

2. En déduire le sens de variation de f.

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4. Discuter, suivant la valeur du réel m, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

35 **ALGORITHMIQUE** @ TICE

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a. Étudier le sens de variation de f.

b. Calculer $f(-20)$, $f(30)$.

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (justifier).

2. Un algorithme

```
VARIABLES : a, b nombres
ENTRÉES : Saisir a, b
TRAITEMENT :
  Si a > b alors
  |     c prend la valeur b
  |     b prend la valeur a
  |     a prend la valeur c
  FinSi
  Si f(b) × f(a) ⩽ 0 Alors
  |  Tantque b – a > 10^(–5) Faire
  |  |   Si f((a + b)/2) × f(a) ⩽ 0
  |  |   |    Alors b prend la valeur (a + b)/2
  |  |   |    Sinon a prend la valeur (a + b)/2
  |  |   FinSi
  |  FinTantque
  FinSi
SORTIES : Afficher a et b
```

a. Que peut-on dire de $f(b)$ et de $f(a)$ lorsque $f(b) \times f(a) \leqslant 0$?

b. Que représente $\dfrac{a+b}{2}$ par rapport à a et b ?

c. Que fait cet algorithme ?

d. Programmer cet algorithme.

e. Que se passe-t-il si l'utilisateur entre les valeurs $a = -20$ et b = 30 ? $a = -20$ et $b = 3$? $a = 0$ et $b = 3$?

f. Comment peut-on s'assurer de trouver la solution souhaitée ?

36 ALGORITHMIQUE Zoom × 10

A. Avec la calculatrice

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -3x - 5 + \frac{2x+8}{x^2+1}$.

1. À l'aide de votre calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f.

2. On admet que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution.
Déterminer n, l'arrondi par défaut à l'unité de la solution de $f(x) = 0$.

3. Sur la calculatrice, créer la table de valeur de f entre les entiers n et $n + 1$ avec un pas de 0,1.
Quel est l'arrondi par défaut à 10^{-1} près de la solution de $f(x) = 0$?

4. Déterminer de même l'arrondi par défaut à 10^{-2} près de la solution de $f(x) = 0$.

B. Algorithme

On souhaite créer un algorithme qui permet de déterminer les décimales successives des solutions de $f(x) = 0$.

1. Quelle condition doivent vérifier deux images successives du tableau de valeur pour que leurs antécédents encadrent la solution de $f(x) = 0$.

2. Écrire un algorithme qui permet de trouver l'arrondi par défaut à 10^{-8} près de la solution de $f(x) = 0$.

3. Comment contrôler le résultat obtenu ?

4. On considère la fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = -3x - 7 + \frac{2x+8}{x^2+1}$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près des solutions de $g(x) = 0$.

37

La figure 1 ci-dessous représente un patron du parallélépipède de la figure 2. Ce patron est fabriqué à partir d'une feuille cartonnée carrée de 30 cm de côté.

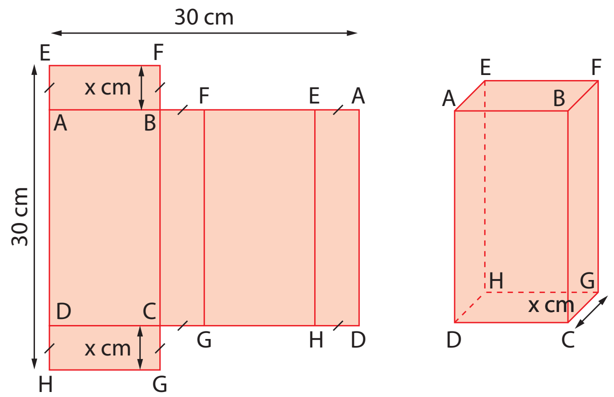


Fig. 1 Fig. 2

1. Démontrer que le volume $V(x)$ du parallélépipède rectangle ABCDEFGH s'exprime en cm^3 par
$V(x) = 2x(15 - x)^2$ pour $x \in [0 ; 15]$.

2. Exprimer $V(x)$ sous forme développée puis étudier le sens de variation de la fonction V sur $[0 ; 15]$.

3. Tracer la courbe représentant la fonction V à la calculatrice. Indiquer la fenêtre choisie.

4. Le parallélépipède ainsi obtenu est une boîte de lait. Le fabricant voudrait que le volume de la boîte soit 0,5 litres, c'est-à-dire 500 cm^3.

a. Combien de valeurs de x correspondent à des boîtes de 0,5 L ? Justifier.

b. Déterminer des valeurs approchées à 0,1 près de ces valeurs de x. Quelle est celle que retiendra le fabriquant ?

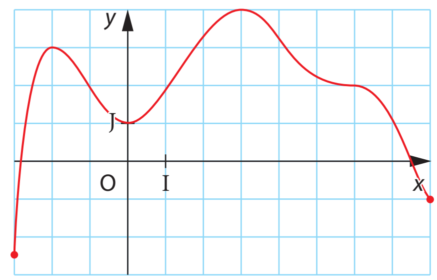
38 Retour sur le trinôme de degré 2

On souhaite démontrer les résultats établis dans le chapitre 1 sur le sens de variation d'une fonction trinôme de degré 2.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, a, b, c réels.
En étudiant le signe de $g'(x)$, dresser le tableau de variation complet de la fonction g.

Extremum d'une fonction

39 Extremum : lecture graphique

1. Quels sont les extrema ou extrema locaux de la fonction dérivable f représentée ci-dessous ?



2. a. Quelles sont les valeurs de x telles que $f'(x) = 0$?

b. Ces valeurs correspondent-elles toutes à des extrema ou extrema locaux de f ?

40

La fonction f est celle de l'exercice **15**.

1. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-10 ; 10]$.

2. La fonction f admet-elle un minimum local ? Un maximum local ? Justifier.

3. Connaît-on certains des nombres dérivés suivants :
$f'(-10)$; $f'(-3)$; $f'(0)$; $f'(10)$?

Aide : exercice résolu 5

Exercices

41 **Local ou global ?**

La fonction f est définie pour tout x réel par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Étudier le sens de variation de f.

2. a. La fonction possède-t-elle des extrema locaux ?
b. La fonction possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Aide : exercice résolu 6

42 Même énoncé que l'exercice **41** pour la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ pour tout x de $]2\,;+\infty[$.

Aide : exercice résolu 6

43 **Un peu d'économie**

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 €.

Partie A. Coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $\mathrm{U}(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $\mathrm{U}(x) = x - 10 + \dfrac{900}{x}$ pour $x \in \mathrm{I}$ où $\mathrm{I} = [10\,;100]$.

1. a. Étudier la fonction U sur I et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ en prenant pour unités 1 cm pour 5 objets et 1 cm pour 10 €.
b. Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.

2. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80 €.

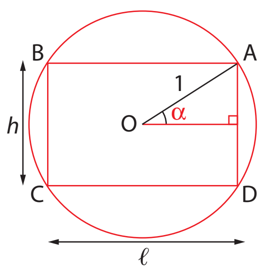
Partie B. Étude du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $\mathrm{B}(x) = -x^2 + 110x - 900$.

2. Déterminer son sens de variation sur $[10\,;100]$ et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

44 **Résistance d'une poutre**

Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où ℓ et h sont les deux dimensions ci-contre :
On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre.



1. Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$.

2. En déduire que $\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell$.

3. Soit $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geqslant 0$.
a. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
b. Comment choisir ℓ et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?

4. Quel est l'angle α correspondant à 0,1° près ?

45 Soit $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1$ pour tout x de $\mathrm{I} = [-1\,;\,5]$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Dresser le tableau de variation de f.

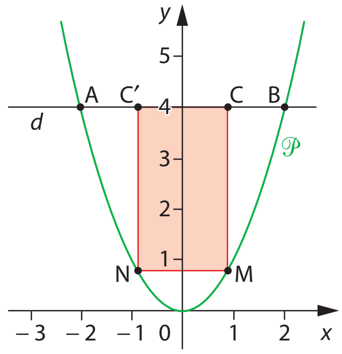
2. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout x de I.

3. Tracer $\mathscr{C}$ et ses tangentes horizontales.

4. a. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$?
b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus petite de ces solutions.

46 **Rectangle dans une parabole**

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et k un réel strictement positif.
On nomme d la droite d'équation $y = k$.



1. Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de $\mathscr{P}$ et de d.

2. Soit C un point du segment [AB] et M le point de $\mathscr{P}$ de même abscisse x que C. On trace le rectangle CMNC′ où C′ appartient à [AB] et N à $\mathscr{P}$.
a. Exprimer l'aire $A_k(x)$ du rectangle CMNC′ en fonction de x et k et préciser sur quel intervalle elle est définie.
b. Déterminer x tel que l'aire de CMNC′ soit maximale.
c. Montrer, quand k décrit $]0\,;+\infty[$, que les points C tels que l'aire de CMNC′ soit maximale, décrivent une partie de la parabole d'équation $y = 3x^2$.

47 Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm³ ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

1. Justifier que $y = \dfrac{1}{x^2}$.

2. En déduire que l'aire totale de la boîte est :

$$\mathrm{S}(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

3. Montrer que pour $x > 0$,

$$\mathrm{S}'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

4. a. En déduire le sens de variation de S sur $]0\,;+\infty[$.
b. Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.