Probabilités
Exercices

Formule reliant $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$

★ **Exercice 4.1**

1. On donne $p(\mathrm{A})=0,2$; $p(\mathrm{B})=0,5$; $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,6$. Que vaut $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$?

2. On donne $p(\mathrm{A})=0,2$; $p(\mathrm{B})=0,5$ et on sait que A et B sont incompatibles.
Que vaut $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$?

Correction :

1. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,2+0,5-0,6=0,1$.

2. A et B incompatibles signifie que $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$, c'est-à-dire que $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$.
Dès lors, $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})=0,2+0,5=0,7$

Arbre et tableau

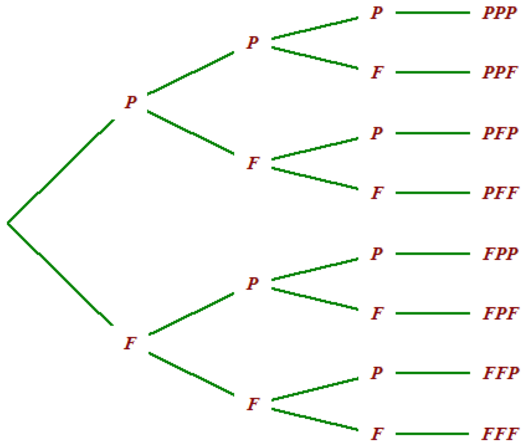
★ **Exercice 4.2**

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie. On note, à chaque lancer, quelle est la face visible, c'est-à-dire soit PILE noté P, soit FACE, notée F.
On obtient ainsi une suite de trois lettres.

1. Quelle est la probabilité de l'événement A : “Obtenir deux P”.

2. Quelle est la probabilité de l'événement B : “Obtenir au moins un F”.

Correction :



1. La probabilité de l'événement A est $\frac{3}{8}$.

2. La probabilité de l'événement B est $\frac{7}{8}$.

★ **Exercice 4.3**

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule.

1. Quelle est la probabilité que la somme des nombres tirés soit égale à 7 ?

2. Quelle est la probabilité que le plus grand des numéros tirés soit au plus égal à 3.

Correction :

1. Tableau de la somme des deux numéros :

Boule 2 / Boule 1	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

La probabilité que la somme des nombres tirés soit égale à 7 est $\frac{4}{25}$.

2. Tableau du plus grand des numéros tirés :

Boule 1 \ Boule 2	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

La probabilité que le plus grand des numéros tirés soit au plus égal à 3, c'est-à-dire inférieur ou égal à 3, est : $\frac{9}{25}$.

Calculs de probabilités

★ **Exercice 4.4**

Les résultats d'une étude menée pour un Parc Naturel Régional concernant les nouveaux visiteurs en 2008 sont rassemblés dans le tableau suivant. Ils sont partagés entre touristes français et étrangers. Cette étude a été menée pour connaître la raison de la venue de ces touristes.

	Français	Étrangers	Total
A : Bouche à oreille	30		35
B : Publicité	20	20	
C : Autre			
Total	70		100

1. Recopier et compléter le tableau précédent.

2. On interroge un touriste au hasard.
   a) Quelle est la probabilité de l'événement F : “cette personne est française” ?
   b) Quelle est la probabilité de l'événement B : “cette personne est venue grâce à la publicité” ?
   c) Comment peut-on noter l'événement : “cette personne est française et elle est venue grâce à la publicité” ? Quelle est la probabilité de cet événement ?
   d) Comment peut-on noter l'événement : “cette personne est française ou est venue grâce à la publicité” ? Quelle est la probabilité de cet événement ?

3. On interroge un touriste étranger au hasard.
Quelle est la probabilité que cette personne soit venue grâce à la publicité ?

4. On interroge au hasard une personne venue grâce au bouche à oreille.
Quelle est la probabilité qu'elle soit française ?

Correction :

1.

	F	E	Total
A : Bouche à oreille	30	5	35
B : Publicité	20	20	40
C : Autre	20	5	25
Total	70	30	100

2. **a)** La probabilité de l'événement F est : $\frac{70}{100}$.

b) La probabilité de l'événement B est : $\frac{40}{100}$.

c) L'événement : "cette personne est française et elle est venue grâce à la publicité" se note $F \cap B$. On a : $p(F \cap B) = \frac{20}{100}$.

d) L'événement : "cette personne est française ou elle est venue grâce à la publicité" se note $F \cup B$. Deux façons pour calculer $p(F \cup B)$:

- calcul direct : $p(F \cup B) = \frac{30+20+20+20}{100} = \frac{90}{100}$,
- formule : $p(F \cup B) = p(F) + p(B) - p(F \cap B) = \frac{70}{100} + \frac{40}{100} - \frac{20}{100} = \frac{90}{100}$

3. La probabilité que cette personne (étrangère) soit venue grâce à la publicité est :
$p_E(B) = \frac{20}{30}$.

4. La probabilité que cette personne (venue grâce au bouche à oreille) soit française est :
$p_A(F) = \frac{30}{35}$.

★ **Exercice 4.5**

Une loterie comporte 50 billets numérotés de 1 à 50.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
A : « Le gros lot est un numéro pair » ; B : « Le gros lot est un numéro divisible par 5 »

2. En déduire la probabilité de l'événement C : « Le gros lot est un numéro pair ou divisible par 5 ».

Correction :

1. Il y a 25 numéros pairs parmi les 50. La probabilité de A est : $\frac{25}{50}$.

Il y a 10 numéros divisibles par 5 (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 et 50). La probabilité de B est : $\frac{10}{50}$.

2. Il y a 5 numéros pairs divisibles par 5 (10, 20, 30, 40 et 50). La probabilité de C est $\frac{5}{50}$.

★ Exercice 4.6

On lance deux dés normaux (non pipé)
Calculer les probabilités des événements suivants :
A : « On obtient deux chiffres différents »
B : « On obtient deux chiffres identiques »
C : « On obtient au moins un 6 »
D : « On obtient un chiffre pair »
E : « On obtient la somme des faces est égale à 7 »
F : « On obtient un chiffre impair et la somme des faces est égale à 6 »

Correction :

Tableau des résultats :

Dé 2 / Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dès lors : $p(A)=\frac{30}{36}$, $p(B)=\frac{6}{36}$, $p(C)=\frac{11}{36}$ et $p(D)=\frac{18}{36}$.

Tableau de la somme :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On a donc : $p(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ et $p(F)=0$ (impossible).

★ Exercice 4.7

On lance 3 dés et on s'intéresse à la somme S des résultats obtenus par ces 3 dés.
Le grand-duc de Toscane s'était étonné de constater qu'il est plus fréquent d'avoir $S = 10$ que $S = 9$ et pourtant ces deux sommes s'obtiennent chacune de 6 façons :
1+3+6 , 1+4+5 , 2+2+6 , 2+3+5 , 2+4+4 , 3+3+4 pour $S = 10$
1+2+6 , 1+3+5 , 1+4+4 , 2+2+5 , 2+3+4 , 3+3+3 pour $S = 9$.
C'est Galilée (1564-1642) qui élucida ce résultat.

1. Déterminer le cardinal de l'événement $S = 10$ puis celui de l'événement $S = 9$.
2. En déduire $P(S = 10)$ puis $P(S = 9)$ et conclure.

Correction :

1. Voici toutes les possibilités d'obtenir 10 :
1+3+6 : (1,3,6) ; (1,6,3) ; (3,1,6) ; (3,6,1) ; (6,1,3) ; (6 ;3 ;1)
1+4+5 : (1,4,5) ; (1,5,4) ; (4,1,5) ; (4 ;5 ;1) ; (5,1,4) ; (5,4,1)
2+2+6 : (2,2,6) ; (2,6,2) ; (6,2,2)
2+3+5 : (2,3,5) ; (2,5,3) ; (3,2,5) ; (3,5,2) ; (5,2,3) ; (5 ;3 ;2)
2+4+4 : (2,4,4) ; (4,2,4) ; (4,4,2)
3+3+4 : (3,3,4) ; (3,4,3) ; (4,3,3)
Il y a donc 27 possibilités d'obtenir 10.

Voici toutes les possibilités d'obtenir 9 :
1+2+6 : (1,2,6) ; (1,6,2) ; (2,1,6) ; (2,6,1) ; (6,1,2) ; (6,2,1)
1+3+5 : (1,3,5) ; (1,5,3) ; (3,1,5) ; (3,5,1) ; (5,1,3) ; (5,3,1)
1+4+4 : (1,4,4) ; (4,1,4) ; (4,4,1)
2+2+5 : (2,2,5) ; (2,5,2) ; (5,2,2)
2+3+4 : (2,3,4) ; (2,4,3) ; (3,2,4) ; (3,4,2) ; (4,2,3) ; (4,3,2)
3+3+3 : (3,3,3)
Il y a donc 25 possibilités d'obtenir 9.

2. Il y a $6^3 = 216$ tirages possibles. Donc $P(S=10) = \dfrac{27}{216}$ et $P(S=9) = \dfrac{25}{216}$.

★ Exercice 4.8

Au XVIIè siècle, le chevalier de Méré, passionné de jeux, pariait qu'avec un dé, il sortirait au moins un 6 en 4 coups.
Quand il prétendit sortir un double 6 en lançant 24 fois un couple de dés, il perdit de l'argent.
C'est en expliquant ce résultat que son ami Pascal devint le fondateur des probabilités.
Nous allons le vérifier dans cet exercice.

1. On lance un dé 4 fois de suite.
Calculer la probabilité de l'événement A : on obtient au moins un 6 en 4 coups.

2. **a)** on lance un couple de dés. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
b) Calculer les probabilités de l'événement B : on obtient au moins un double 6 en 24 coups.

3. Conclure.

Correction :

1. $\overline{A}$ est : « on obtient aucun 6 en 4 coups ». Il y a 5^4 possibilités de n'obtenir aucun 6.
Donc $P(\overline{A}) = \dfrac{5^4}{6^4}$ et $P(A) = 1 - \dfrac{5^4}{6^4}$.

2. **a)** Il y a bien sûr 36 résultats possibles.
b) $\overline{B}$ est : « on obtient aucun double 6 en 24 coups ». Il y a 35^{24} possibilités de n'obtenir aucun double 6. Donc $P(\overline{B}) = \dfrac{35^{24}}{36^{24}}$ et $P(B) = 1 - \dfrac{35^{24}}{36^{24}}$.

3. La conclusion se fait grâce à la calculatrice :
$P(A) = 1 - \dfrac{5^4}{6^4} \approx 0,5177$ et $P(B) = 1 - \dfrac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,4914$.
Le chevalier de Méré avait plus d'1 chance sur 2 de gagner dans le 1er cas, mais moins d'1 chance sur 2 de gagner dans le second cas.