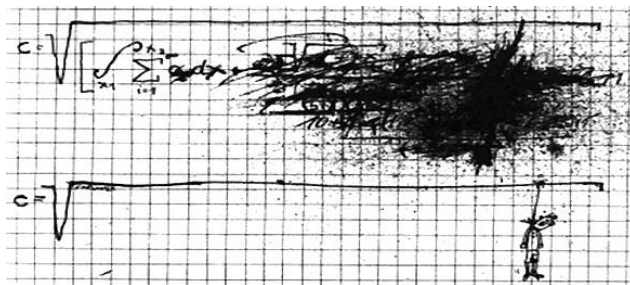


E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Exercices progressifs : la fonction exp

Julien Fernandez



Niveau 1 : Profane

⇒ Exercice corrigé 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x + 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. Astuce : $f(x) = e^x + (x+1)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Rappel : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

2. $f'(x) = e^x + 1$



Rappel : $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

⇒ Exercice corrigé 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $f'(x) = 2e^{2x} + 1$



Rappel : $(e^{ax})' = a e^{ax}$ donc $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

⇒ Exercice corrigé 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{-x} - x = e^{-x} + (-x).$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. $f'(x) = -e^{-x} - 1$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) < 0$ comme somme de deux termes négatifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

⇒ Exercice corrigé 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
- Calculer la dérivée de f .
- Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{2x} + (-e^{-x})$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$.

Rappel : $(e^{ax})' = ae^{ax}$. En particulier, $(e^{-x})' = -e^{-x}$.



3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

⇒ Exercice corrigé 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - 2x - 1$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
- Calculer la dérivée de f .
- Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{-x} + (-2x - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x - 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x - 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. $f'(x) = -e^{-x} - 2$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) < 0$ comme somme de deux termes négatifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	
variations de f	$+\infty$	$-\infty$

⇒ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x) = e^x + 2x$

② Même exercice avec $f(x) = e^{-3x} - x^3$

Niveau 2 : Novice



⇒ Exercice corrigé 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x + 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. Astuce : $f(x) = e^x - x + 1 = e^x + (-x + 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = e^x - 1$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:



Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». On pose alors l'inéquation.

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(0) = e^0 - 0 + 1 = 2.$$

⇒ Exercice corrigé 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $f'(x) = -e^{-x} + 1$



Rappel : $(e^{ax})' = a e^{ax}$ donc $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$-e^{-x} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 0 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[,$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(0) = e^{-0} + 0 = 1.$$

⇒ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x) = e^x - 2x - 1$

Niveau 3 : Initié

⇒ Exercice corrigé 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{-x} + 2x - 1 = e^{-x} + (2x - 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f'(x) = -e^{-x} + 2$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$: $-e^{-x} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x} \geq -2 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 2 \Leftrightarrow -x \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$

On en déduit :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(-\ln 2)$	$+\infty$

$$f(-\ln 2) = e^{-(-\ln 2)} + 2(-\ln 2) - 1 = e^{\ln 2} - 2\ln 2 - 1 = 2 - 2\ln 2 - 1 = 1 - 2\ln 2$$

⇒ Exercice corrigé 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $f(x) = e^{2x} - x = e^{2x} + (-x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



2. $f'(x) = 2e^{2x} - 1$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$2e^{2x} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[,$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{\ln(2)}{2}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\ln(2)/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$(1+\ln 2)/2$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = e^{2 \times \left(-\frac{\ln 2}{2}\right)} - \left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Niveau 4 : Professionnel

⇒ Exercice corrigé 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

**Correction :**

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^x) + (x) \times (e^x) = e^x + x e^x = e^x (x+1).$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

⇒ Exercice corrigé 11

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- puis en 0^+ .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées (c'est une limite de cours).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array}$$



Rappel : « $\frac{0}{\infty}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

En termes de limites : $\frac{0}{\infty} = 0$ et $\frac{\infty}{0} = \infty$ (reste à déterminer si c'est $-\infty$ ou $+\infty$).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(e^x) \times (x) - (1) \times (e^x)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}.$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$e^x > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [.$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$	
f	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow e \nearrow +\infty$	

$$f(1) = \frac{e}{1} = e.$$

⇒ Exercice corrigé 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{2x}$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
- Calculer la dérivée de f .
- Déterminer le tableau des variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^{2x}) + (2e^{2x}) \times (x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(2x+1).$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $2x+1$.

$$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$0 \searrow -\frac{1}{2e}$		$+\infty \nearrow$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} e^{-1} = -\frac{1}{2e}.$$

⇒ Exercice corrigé 13

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- puis en 0^+ .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(2e^{2x}) \times (x) - (1) \times (e^{2x})}{x^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}.$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$e^{2x} > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[.$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[.$$

$$\text{Donc } f'(x) \text{ est du signe de } 2x-1. \quad 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
f	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2e$	$2e \nearrow +\infty$	$+\infty$

$$f(0,5) = \frac{e^{2 \times 0,5}}{1/2} = \frac{e}{1/2} = 2e.$$

⇒ Exercice corrigé 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

2. $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^{-x}) + (x) \times (-e^{-x}) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x} (1 - x).$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

$$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$f(1) = (1)e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

⇒ Exercice corrigé 15

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- puis en 0^+ .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Déterminer le tableau de variations de f .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées (et la règle des signes),}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{par quotient de limites,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x}) \times (x) - (1) \times (e^{-x})}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}.$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$$e^{-x} > 0 \text{ sur }]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

$$-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-	-
f	$-\infty$	$-e$	$+\infty$	0

$$f(-1) = \frac{e^{-(-1)}}{-1} = -e.$$

Niveau 5 : Expert**⇒ Exercice 16**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x}).$$

1. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$.
 b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
 c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variation de f .
2. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ .

**⇒ Exercice 17**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{2+e^x}$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-x}}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f .

⇒ Exercice 18

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-3)e^{-x}$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$).
2. Montrer que $g(x) < 1$ sur $\mathbb{R}$.

⇒ Exercice 19

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Niveau 6 : Master**⇒ Exercice 20****Partie A :**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x + x + 1.$$

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique α solution dans l'intervalle $[-2 ; -1]$.
Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en donner une valeur approchée.
2. **a)** Montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

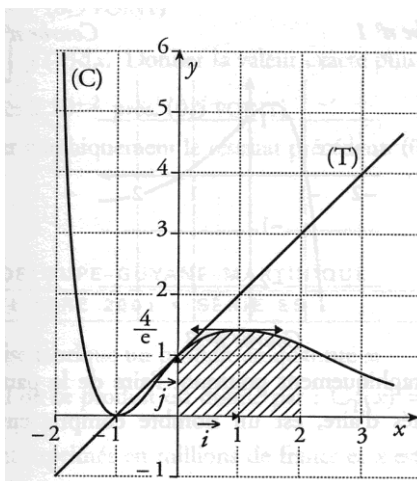


⇒ Exercice 21 (bac ES)

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-dessous, la courbe (C) représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite (T) est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.

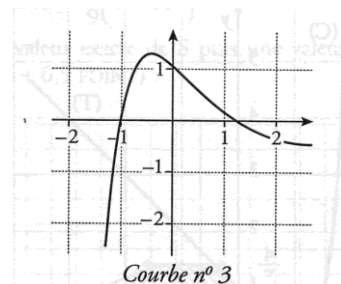
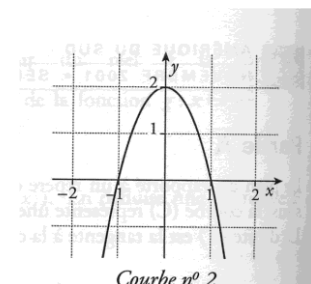
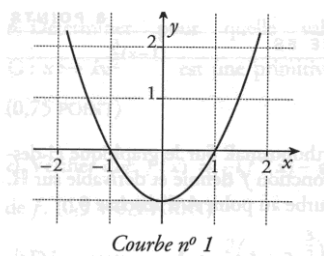


1. À partir du graphique, reproduire et compléter sans justification le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			

Justifier les valeurs de $f'(-1)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f a pour dérivée une fonction f' dont la courbe est l'une des trois suivantes. Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.



3. Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de la partie hachurée, exprimée en unités d'aire, est un nombre compris entre 2 et $\frac{8}{e}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$.

1. Étudier le signe de $f(x)$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f suivant les valeurs de x . Dresser le tableau de variation de f .
4. **a)** Montrer que, sur l'intervalle $[1 ; 3]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α unique.
b) α est-elle comprise entre 1 et 2 ou entre 2 et 3 ?
5. Déterminer trois réels a , b et c tels que la fonction $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ ait pour dérivée f .

⇒ Exercice 22

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. Conjecturer pour tout $n \geq 1$, l'expression de $f^{(n)}(x)$. La démontrer par récurrence.

⇒ Exercice 23 (bac S)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1. a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1$.
b) Étudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

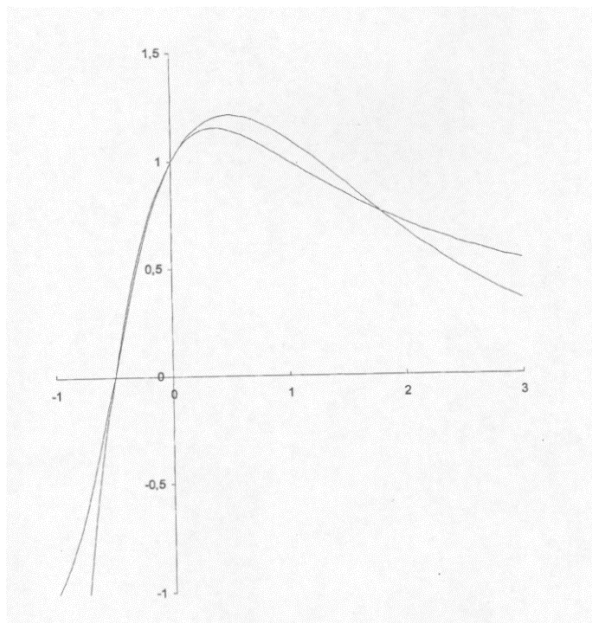
Partie B : Étude de la position relative de deux courbes

On donne ci-après les courbes représentatives de deux fonctions f et g .

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont notées C_f et C_g .

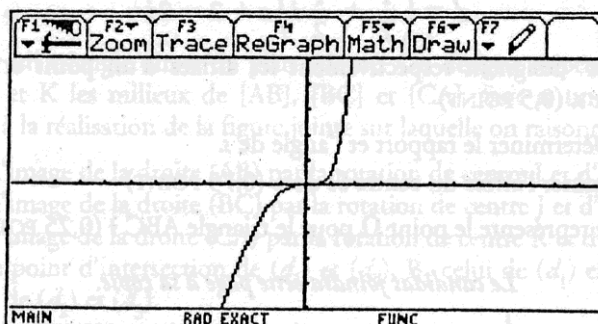
1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A.
b) À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g .



⇒ Exercice 24 (bac S)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$.

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

**Conjecture**

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant le sens de variation de f sur $[-3; 2]$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Contrôle de la conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
 - a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
 - b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
 - c) En déduire le sens de variation de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.
 - d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On admet que $\alpha \approx 0,2$.
 - e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - a) Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
 - b) En déduire le sens de variation de la fonction f .
 - c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?