Probabilités

I. Langage des évènements

1. Vocabulaire

Une expérience aléatoire est une expérience pour laquelle l'ensemble des résultats est connu à l'avance. Cet ensemble de résultats est appelé univers. On le note : Ω.

Exemples :
- On lance une pièce de monnaie et on note la face visible. L'univers est constitué des résultats : pile ou face. On note $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé cubique et on note le nombre qui apparaît sur la face supérieure. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé : éventualité.

L'adjectif aléatoire indique que l'on ne peut pas prévoir *a priori* le résultat de l'expérience.

Remarque :
Si on lance une pièce de monnaie, on ne peut pas déterminer à l'avance si la face visible sera pile ou face.

Un évènement est une partie de l'univers. Il peut être constitué de plusieurs éventualités.

Exemple :
Pour l'expérience du lancer d'un dé cubique l'événement A : « le résultat est pair » comprend trois éventualités. On note $A = \{2, 4, 6\}$.

Un évènement élémentaire est un événement qui ne comprend qu'une éventualité

Exemple :
Soit B l'événement « obtenir un résultat multiple de 5 » au cours du lancer d'un dé cubique : $B=\{5\}$.

Un évènement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible.
Un évènement qui contient toutes les éventualités est l'événement certain.

Exemples :
L'événement C : « Obtenir un résultat supérieur à 7 » au cours du lancer d'un dé est un événement impossible, on note C = $\varnothing$.
En revanche, l'événement D : « obtenir un résultat inférieur à 7 » est l'événement certain.
D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = Ω.

2. Représentations des évènements

Tableau :
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
Les différentes éventualités sont représentées par les cases du tableau ci-dessous.
L'univers est donc : {(P, P) ; (P, F) ; (F, P) ; (F, F)}.

2ème lancer / 1er lancer	**P**	**F**
P	**(P, P)**	**(P, F)**
F	**(F, P)**	**(F, F)**

Arbres :
Les 4 éventualités de l'exemple précédent peuvent être représentées à l'aide d'un arbre :
À faire …

3. Évènements incompatibles

Deux événements sont incompatibles s'ils n'ont aucune éventualité commune : leur intersection est l'ensemble vide.

Exemple :
On lance un dé cubique.
L'événement A : « obtenir un nombre pair » et l'événement B « obtenir 5 » sont des événements incompatibles.
En effet, A = {2 ; 4 ; 6) et B = {5}.
Les événements A et B n'ont aucune éventualité commune.

4. Évènements contraires

Si A est un événement de l'univers Ω, l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué de toutes les éventualités de l'univers Ω n'appartenant pas à A.

Exemple :
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

L'événement contraire de l'événement B : « tirer deux fois pile » est l'événement constitué de toutes les éventualités n'appartenant pas à B.
Ainsi, $\overline{\mathrm{B}}$ = {(P,F) ; (F,P) ; (F,F)}.

II. Calcul des probabilités

1. Définition

Quand on jette un dé bien équilibré de forme cubique parfaite, chaque face a les mêmes chances d'apparaître. Par conséquent, chaque face a une chance sur six d'apparaître : on dit que la probabilité d'apparition de chaque face est de $\frac{1}{6}$.

On définit une probabilité p sur un univers Ω en associant à chaque évènement A de Ω un nombre compris entre 0 et 1 appelé probabilité de A, noté $p(\mathrm{A})$, tel que :

- la probabilité de l'événement certain est 1 : $p(\Omega)=1$;
- la probabilité de l'événement impossible est 0 : $p(\varnothing)=0$;
- la probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers Ω est égale à 1.
Si $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \ldots + p(\{e_n\}) = 1$.

★ **Exercice**

1. On lance un dé bien équilibré.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre au moins égal à 5 ?

2. Mêmes questions si on lance un dé truqué, les probabilités de faire apparaître les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 étant respectivement :
$p_1 = \frac{5}{18}$, $p_2 = \frac{2}{9}$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{6}$, $p_5 = \frac{1}{9}$ et p_6, à déterminer.

2. Propriétés des évènements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles $(A \cap B = \varnothing)$, alors :

$p(A \cap B) = 0$;

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemple :
On lance le dé truqué de l'exemple précédent.
Soit A l'événement : « tirer un nombre pair » et B l'événement : « tirer 5 ».
A et B sont deux événements incompatibles.
On a vu $p(A) = \frac{4}{9}$ et $p(B) = \frac{1}{9}$. $p(A \cup B) = \frac{5}{9}$.

3 Probabilité de l'évènement contraire

Si A est un événement et $\overline{A}$ son événement contraire, alors $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple :
On lance le dé truqué de l'exemple précédent.
Soit E l'événement : « tirer un nombre impair ».
Son événement contraire est l'événement $\overline{E}$: « tirer un nombre pair ».
$p(\overline{E}) = \frac{4}{9}$, donc $p(E) = \frac{5}{9}$.

On peut vérifier que $p(E) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

4. Formule reliant $p(A \cup B)$ et $p(A \cap B)$ (formule du crible pour 2 événements)

Pour tous événements *A* et *B* : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

5. Équiprobabilité

Quand chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont équiprobables.

Exemples :
Tirage de pile ou face (pièce non truquée), lancer d'un dé (dé non pipé), tirage de boule(s) dans une urne (boules indissociables au toucher), tirage de carte(s) dans un jeu…

Quand les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple :
Déterminer la probabilité de l'évènement « tirer un roi » lorsqu'on tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

Soit une expérience aléatoire et A un évènement, de probabilité p, associé à cette expérience. Si on réalise un grand nombre de fois l'expérience, la fréquence d'apparitions des résultats vérifiant l'évènement A se rapproche du nombre $p(\mathrm{A})$.

Ainsi, on admettra que pour déterminer la probabilité d'un évènement A, on peut réaliser une étude statistique sur un échantillon assez important d'expériences et attribuer comme probabilité de A la fréquence de réalisations de cet événement.