

Polynômes du second degré Exercices
--

★ Exercice 5.1

Dans chaque question, on donne un polynôme et un ou des nombres.

Montrer que les nombres sont racines du polynôme correspondant.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 1 et 2. 2. $f(x) = x^3 - 7x^2 - x + 7$; 1.

Correction :

Pour montrer qu'un nombre a est racine d'un polynôme $f(x)$, il faut calculer $f(a)$ et montrer que $f(a) = 0$.

1. $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$. 1 est donc racine du polynôme $f(x)$.
 $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$. 2 est donc racine du polynôme $f(x)$.
 2. $f(1) = 1^3 - 7 \times 1^2 - 1 + 7 = 1 - 7 - 1 + 7 = 0$. 1 est donc racine du polynôme $f(x)$.

Pour les exercices 2 à 6, on considère les six fonctions trinômes suivantes :

- a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ b) $f(x) = x^2 - 20x + 100$ c) $f(x) = x^2 - 6x - 7$
 d) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ e) $f(x) = -9x^2 + 6x - 5$ f) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

★ Exercice 5.2

Calculer le discriminant Δ de chacun des six trinômes.

Correction :

Soit P un trinôme du second degré de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On appelle **discriminant** du trinôme, le réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- a) $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$.
 b) $a = 1$, $b = -20$ et $c = 100$.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 100 = 400 - 400 = 0$.

c) $a=1$, $b=-6$ et $c=-7$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 36 + 28 = 64.$$

d) $a=2$, $b=-3$ et $c=-2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25.$$

e) $a=-9$, $b=6$ et $c=-5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times (-9) \times (-5) = 36 - 180 = -144.$$

f) $a=-4$, $b=4$ et $c=-1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-4) \times (-1) = 16 - 16 = 0.$$

★ Exercice 5.3

Pour chacun des six trinômes, **résoudre** $f(x) = 0$.

Correction :



Soient $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

◆ Si $\Delta > 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

◆ Si $\Delta = 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet une seule solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

◆ Si $\Delta < 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

a) $\Delta = -7 < 0$. L'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution réelle.

b) $\Delta = 0$. L'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2 \times 1} = 10$.

c) $\Delta = 64 = 8^2 > 0$. L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{6 - 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{6 + 8}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

d) $\Delta = 25 = 5^2 > 0$. L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3 - 5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3 + 5}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

e) $\Delta = -144 < 0$. L'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution réelle.

f) $\Delta = 0$. L'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-4)} = -\frac{4}{-8} = \frac{1}{2}.$$

★ Exercice 5.4

Factoriser, si possible chacun des six trinômes.

Correction :



Soient $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- ◆ Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 et, pour tout réel x ,
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$
- ◆ Si $\Delta = 0$, alors P admet une seule racine réelle x_0 et, pour tout réel x ,
$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$
- ◆ Si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas factoriser $f(x)$.

D'après l'exercice précédent :

a) on ne peut pas factoriser $f(x)$.

b) $f(x) = (x - 10)^2$.

c) $f(x) = (x + 1)(x - 7)$.

d) $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)$. Remarquons que $f(x) = (2x + 1)(x - 2)$ aussi.

e) on ne peut pas factoriser $f(x)$.

f) $f(x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Remarquons que $f(x) = -(2x - 1)^2$ aussi.

★ Exercice 5.5

Déterminer les variations de chacune des six fonctions trinômes.

Correction :



Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si $a > 0$		Si $a < 0$	
La parabole est orientée vers le haut		La parabole est orientée vers le bas	
x	$-\frac{b}{2a}$	x	$-\frac{b}{2a}$
f	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	f	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

a) $a = 1 > 0$. La parabole est orientée vers le haut. De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 1} = 1,5$.

$$\text{Et } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1,5) = 1,5^2 - 3 \times 1,5 + 4 = 2,25 - 4,5 + 4 = 1,75.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	1,5
f	1,75

b) $a = 1 > 0$. La parabole est orientée vers le haut. De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2 \times 1} = 10$.

$$\text{Et } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(10) = 10^2 - 20 \times 10 + 100 = 100 - 200 + 100 = 0.$$

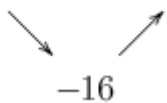
On en déduit le tableau des variations de f :

x	10
f	0

c) $a = 1 > 0$. La parabole est orientée vers le haut. De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$.

$$\text{Et } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 - 7 = 9 - 18 - 7 = -16.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

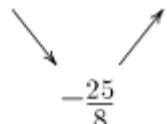
x	3
f	 -16

d) $a = 2 > 0$. La parabole est orientée vers le haut. De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Et} \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) - 2 = 2 \times \frac{9}{16} - 3 \times \frac{3}{4} - 2.$$

$$\Leftrightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 2 = \frac{9 - 18 - 16}{8} = -\frac{25}{8}.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$\frac{3}{4}$
f	 $-\frac{25}{8}$

e) $a = -9 < 0$. La parabole est orientée vers le bas. De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (-9)} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Et} \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{1}{3}\right) - 5 = -9 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{1}{3} - 5 = -1 + 2 - 5 = -4.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$\frac{1}{3}$
f	 -4

f) $a = -4 < 0$. La parabole est orientée vers le bas. De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-4)} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Et} \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -4 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} - 1 = -1 + 2 - 1 = 0.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$\frac{1}{2}$
f	 0

★ Exercice 5.6

Déterminer le signe de chacun des six trinômes.

Correction :



Soient $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- ◆ Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	$racine1$	$racine2$	$+\infty$
$f(x)$	$signe(a)$	0	$signe(-a)$	$signe(a)$

- ◆ Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a :

x	$-\infty$	$racine$	$+\infty$
$f(x)$	$signe(a)$	0	$signe(a)$

- ◆ Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$signe(a)$	

- a) $\Delta = -7 < 0$. $f(x)$ est du signe de $a = 1$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

- b) $\Delta = 0$ et $x_0 = 10$. $f(x)$ est du signe de $a = 1$:

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

- c) $\Delta = 64 > 0$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 7$. $f(x)$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- d) $\Delta = 25 > 0$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$. $f(x)$ est du signe de $a = 2$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

e) $\Delta = -144 < 0$. $f(x)$ est du signe de $a = -9$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	–	

f) $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{1}{2}$. $f(x)$ est du signe de $a = -4$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	–	0	–

★ Exercice 5.7 : devoir à la maison

On considère les trois trinômes suivants :

$$f_1(x) = -2x^2 + 4x + 6 ; \quad f_2(x) = x^2 - 6x + 9 ; \quad f_3(x) = -3x^2 - 2x - 2.$$

1. Résoudre, pour chacun des cas, l'équation $f(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de signe de chacun des trinômes.
3. Déterminer les variations de chacun des trinômes.

Correction :

★ $f_1(x) = -2x^2 + 4x + 6$:

1. $a = -2$, $b = 4$ et $c = 6$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 8}{2 \times (-2)} = \frac{-12}{-4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 8}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1.$$

L'équation $f_1(x) = 0$ possède deux solutions : -1 et 3 .

2. $f_1(x)$ est du signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3. $a = -2 < 0$: la parabole est orientée vers le bas.

De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-2)} = 1$ et $f_1\left(-\frac{b}{2a}\right) = f_1(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 + 6 = -2 + 4 + 6 = 8$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$-\infty$	8	$-\infty$

★ $f_2(x) = x^2 - 6x + 9$:

1. $a = 1$, $b = -6$ et $c = 9$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0.$$

Il y a une racine : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$.

L'équation $f_2(x) = 0$ possède une seule solution : 3.

2. $f_2(x)$ est du signe de $a = 1$:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

3. $a = 1 > 0$: la parabole est orientée vers le haut.

De plus, $-\frac{b}{2a} = 3$ et $f_2\left(-\frac{b}{2a}\right) = f_2(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

★ $f_3(x) = -3x^2 - 2x - 2$:

1. $a = -3$, $b = -2$ et $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-2)^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 4 - 24 = -20 < 0.$$

L'équation $f_3(x) = 0$ ne possède pas de solution.

2. $f_3(x)$ est du signe de $a = -3$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

3. $a = -3 < 0$: la parabole est orientée vers le bas.

De plus, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-3)} = -\frac{1}{3}$ et

$$f_3\left(-\frac{b}{2a}\right) = f_3\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -3 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{3} - 2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
f	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$-\infty$

★ Exercice 5.8

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2. $2x^2 + x + 2 = 0$.

3. $3x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

4. $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Correction :

1. $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = 1^2 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

L'équation possède deux solutions : 1 et 2.

2. $a = 2$, $b = 1$ et $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 1^2 - 4 \times 2 \times 2 = 1 - 16 = -15 < 0.$$

L'équation ne possède pas de solution.

3. $a = 3$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = -\frac{1}{4}$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{7}{4}}{2 \times 3} = \frac{-\frac{8}{4}}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{7}{4}}{2 \times 3} = \frac{\frac{6}{4}}{6} = \frac{6}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

L'équation possède deux solutions : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

4. $a=1$, $b=8$ et $c=15$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 8^2 - 4 \times 1 \times 15 = 64 - 60 = 4 = 2^2 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 2}{2 \times 1} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 2}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

L'équation possède deux solutions : -5 et -3 .

★ Exercice 5.9

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 75x^2 - 60x + 12$.

2. $f(x) = -2x^2 + x - 1$.

3. $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.

Correction :

1. $a=75$, $b=-60$ et $c=12$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-60)^2 - 4 \times 75 \times 12 = 3600 - 3600 = 0.$$

$$\text{Il y a une seule racine : } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-60)}{2 \times 75} = \frac{60}{150} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

$f(x)$ est du signe de $a=75$:

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

2. $a=-2$, $b=1$ et $c=-1$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 - 8 = -7 < 0.$$

$f(x)$ est du signe de $a=-2$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	-

3. $a=-1$, $b=8$ et $c=-15$.

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-15) = 64 - 60 = 4 = 2^2 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 2}{2 \times (-1)} = \frac{-10}{-2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 2}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

$f(x)$ est du signe de $a=-1$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

★ Exercice 5.10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 + x + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 5x - 7 = 0$.
3. Factoriser l'expression $f(x) = 5x^2 + 9x - 2$.
4. Déterminer les variations de la fonction g définie sur $[-2 ; 5]$ par $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
5. Déterminer le signe du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
6. Déterminer le signe du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$.

Réponses (non détaillées) :

1. $\Delta = -7$. L'équation ne possède pas de solution.
2. $\Delta = 81 = 9^2$. L'équation possède deux solutions : -1 et $\frac{7}{2}$.
3. $\Delta = 121 = 11^2$. Il y a deux racines : -2 et $\frac{1}{5}$.

On en déduit : $f(x) = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x + 2) = (5x - 1)(x + 2)$.

4. $a = -1 < 0$. La parabole est orientée vers le bas.

Le tableau des variations de f est :

x	-2	1	$+5$
f	-3	6	-10

5. $\Delta = 16$, $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = 1$. $P(x)$ est du signe de 3 à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

6. $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{1}{2}$. $P(x)$ est du signe de -1 .

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$-$

7. Il s'agit d'une inéquation. Les solutions se déduisent du tableau de signe.

$\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{1}{3}$. Le polynôme est du signe de -9 .

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$-$

Finalement la seule solution de l'inéquation : $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$ est $\frac{1}{3}$.

★ **Exercice 5.11**

On considère la fonction f définie sur $]1,5 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 - 8x + 3}$.

Simplifier f .

Correction :

Factorisons $2x^2 + 5x - 3$.

Son discriminant est : $5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$.

Ses deux racines sont : $\frac{-5-7}{4} = -3$ et $\frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$.

Finalement, $2x^2 + 5x - 3 = 2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Factorisons $4x^2 - 8x + 3$.

Son discriminant est : $(-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0$.

Ses deux racines sont : $\frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$ et $\frac{8+4}{8} = \frac{3}{2}$.

Finalement, $4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

En définitive, $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 - 8x + 3} = \frac{2(x+3)\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}}{4\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{2(x+3)}{4\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{(x+3)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x+3}{2x-3}$.

★ **Exercice 5.12**

On considère le trinôme suivant : $P(x) = \frac{1}{2}mx^2 + 2x + (m-1)$ où m est un réel.
Déterminer pour quelles valeurs de m l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions.

Correction :

L'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions si son discriminant Δ est strictement positif.

$$a = \frac{1}{2}m, \quad b = 2 \quad \text{et} \quad c = m-1.$$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}m\right) \times (m-1) = 4 - 2m(m-1) = 4 - 2m^2 + 2m = -2m^2 + 2m + 4.$$

Ce discriminant est, lui-même, un trinôme du second degré en m .

On a besoin de connaître son signe selon les valeurs de m .

Il est donc nécessaire de calculer son discriminant.

Ce nouveau discriminant (par rapport à m) est égal à : $(2)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36 = 6^2 > 0$

Ses deux racines sont $m_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \times (-2)} = \frac{-2 - 6}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$ et $m_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \times (-2)} = \frac{-2 + 6}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$.

Finalement, Δ est donc strictement positif si $m \in]-1 ; 2[$.