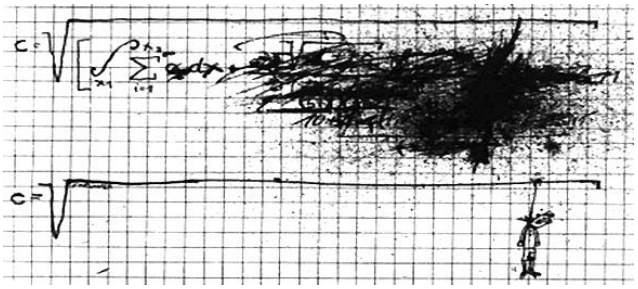
E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Exercices progressifs : la fonction ln

Julien Fernandez



Niveau 1 : Profane

⇨ Exercice corrigé 1

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)+x$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de *f*.
3. Déterminer le tableau de variations de *f*.

Correction :

1.

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}x=0$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x)+x\right)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+x\right)=+\infty$

Rappel : $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

Remarque : la technique du « point, point, accolade » est LA technique la plus importante des limites.

2. $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$

Rappel : $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}>0$ car $x\in]0\,;+\infty[$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x)>0$ <u>comme somme de deux termes positifs</u> sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

⇨ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x)=\ln(x)+2x$

② Même exercice avec $f(x)=\ln(x)+3x+1$ (pour les limites, écrire $f(x)=\ln(x)+(3x+1)$)

③ Même exercice avec $f(x)=\ln(x)+\frac{1}{2}x^2$

④ Même exercice avec $f(x)=\ln(x)+x^3$

⑤ Même exercice avec $f(x)=-3x-\ln(x)$

Niveau 2 : Novice

⇨ Exercice corrigé 2

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-x$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en $+\infty$.

2. Calculer la dérivée de *f*.

3. Déterminer le tableau de variations de *f*.

Correction :

1. $f(x)=\ln(x)-x=\ln(x)+(-x)$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}-x=0$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)-x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)-x)=-\infty$

Rappel : « $+\infty-\infty$ » est la seule forme indéterminée relative à l'addition ou à la soustraction.

2. $f'(x)=\frac{1}{x}-1$

Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». Il faut alors factoriser, c'est-à-dire réduire au même dénominateur.

$f'(x)=\frac{1-x}{x}$.

Remarque : on peut maintenant étudier le signe des deux facteurs.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0\,;+\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$.

Remarque : ici, il est possible de poser l'inéquation

$1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1 \Leftrightarrow x<1$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

$f(1)=\ln(1)-1=-1$.

⇨ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x)=\ln(x)-2x$

② Même exercice avec $f(x)=\ln(x)-3x+1$

(pour les limites, écrire $f(x)=\ln(x)+(-3x+1)$)

Niveau 3 : Initié

⇨ Exercice corrigé 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}x^2$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Déterminer le tableau de variations de f.

Correction :

1. $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}x^2=\ln(x)+\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2}x^2=0$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}x^2\right)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}-\frac{1}{2}x^2=-\infty$

par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}x^2\right)=-\infty$

Rappel : « $+\infty-\infty$ » est la seule forme indéterminée relative à l'addition ou à la soustraction.

2. $f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$.

Remarque : ici, on a factorisé grâce à l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Il aurait été possible de passer par Δ mais ça aurait été maladroit.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x>0$ car $x\in]0\,;+\infty[$.
- $1+x>0$ car $x\in]0\,;+\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$.

  $1-x>0\Leftrightarrow -x>-1\Leftrightarrow x<1$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

$f(1)=\ln(1)-\frac{1}{2}\times 1^2=-\frac{1}{2}$.

⇨ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x)=4\ln(x)-\frac{1}{2}x^2$

② Même exercice avec $f(x)=\ln(x)-2x^2$

Niveau 4 : Professionnel

⇨ Exercice corrigé 4

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x)$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de *f*.
3. Déterminer le tableau de variations de *f*.

Correction :

1. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (c'est une limite du cours).

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

   } par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$

Rappel : « $0\times\infty$ » est la seule forme indéterminée relative à la multiplication.

2. $(u\times v)'=u'v+v'u$, donc :

$$f'(x)=(1)\times(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\right)\times(x)=\ln x+1.$$

Remarque : attention à bien reconnaitre le produit « *uv* ». Ici, $u(x)=x$ et $v(x)=\ln(x)$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

Remarque : ici, on pose directement l'inéquation.

$$\begin{aligned} & \ln x+1>0 \\ \Leftrightarrow\quad & \ln x>-1 \\ \Leftrightarrow\quad & x>\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}} \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0 ‖	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$$

⇨ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x)=x\ln(x)+x$

② Même exercice avec $f(x)=x\ln(x)-x$

Aide pour les limites :

- en 0 : technique de « point, point, accolade » grâce à la limite de cours
- en $+\infty$: factorisation par *x*

⇨ Exercice corrigé 5

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de *f*.
3. Déterminer le tableau de variations de *f*.

Correction :

1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$

} par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

Rappel : « $\dfrac{\infty}{0}=\infty$ » et « $\dfrac{0}{\infty}=0$ » ne sont pas des formes indéterminées.

Remarque : lorsqu'une limite comporte une « division par 0 », on doit faire attention au signe du dénominateur.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées (c'est une limite du cours).

Rappel : « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ » sont les deux formes indéterminées relatives à la division.

2. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times(x)-(1)\times(\ln x)}{(x)^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Remarque : attention à bien reconnaitre le produit « $\dfrac{u}{v}$ ». Ici, $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x^2>0$ car $x>0$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-\ln x$.

$1-\ln x>0$.
$\Leftrightarrow\quad -\ln x>-1$
$\Leftrightarrow\quad \ln x<1$
$\Leftrightarrow\quad x<\mathrm{e}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f(\mathrm{e})=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

⇨ Je m'entraîne

① Même exercice avec $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$.

② Même exercice avec $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Attention, il y a une valeur interdite et donc 4 limites à calculer.

Pour les exercices qui suivent :

- les exercices des niveaux *expert* et *master* sont plus compliqués. Il est impératif de maîtriser parfaitement tous les exercices précédents.
- à tout moment, si je souhaite de l'aide ou si je veux valider mon travail, je peux transférer ma production au format image à l'adresse : perrin_maths@hotmail.fr.

Niveau 5 : Expert

Désolé, c'est sympa mais je n'ai pas trouvé mieux

⇨ Exercice 6

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-2x+3$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En donner une valeur approchée. *On rappelle que* $\ln(2)\simeq 0,7$.

2. **a)** On souhaite calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Recopier et compléter les pointillés :

$\left.\begin{array}{l}\cdot\ \lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=.....\\ \cdot\ \lim\limits_{x\to 0}-2x+3=.....\end{array}\right\}$ par ..... de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=.....$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x>0$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau des variations de *f*.

On fera figurer les limites aux bornes et les valeurs particulières.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

5. **a)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0;+\infty[$ avec $\alpha<\beta$.

b) Justifier que $\beta\in]1,2[$.

⇨ Exercice 7

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$.

1. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$ et la limite de *f* en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de *f*.
3. Déterminer le tableau de variations de *f*.

⇨ Exercice 8

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)}$.

1. Étudier le signe de $x-\ln(x)$. En déduire l'ensemble de définition de *f*.
2. Déterminer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en $+\infty$.
3. Étudier les variations de *f* sur son ensemble de définition.

⇨ Exercice 9

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de *f*.
3. Déterminer le tableau de variations de *f*.

Niveau 6 : Master

⇨ Exercice 10

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x)=x+1-\frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2-1+\ln(x).$$

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer la dérivée de *g*.

b) En déduire que *g* est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

2. a) Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en 0.

b) Calculer la dérivée de *f*. Vérifier pour tout réel *x* strictement positif : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Déduire, à l'aide de la question précédente et à l'aide de la question **1** le signe de $f'(x)$ puis le tableau complet des variations de *f*.

d) Démontrer que la courbe C possède une asymptote oblique D que l'on déterminera.

e) Étudier la position relative de C et D.

⇨ Exercice 11

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \text{ si } x>0. \end{cases}$$

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Partie A

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction *f* ?

b) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

2. **a)** Étudier la dérivabilité de *f* en 0.

b) Montrer que *f* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

3. Étudier le sens de variation de *f* sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$.

Étudier le sens de variation de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Étudier le sens de variation de *g*.
En déduire la position de la courbe C par rapport à la tangente T.

⇨ Exercice 12

1. Soit L la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $\mathrm{L}(x) = x\ln x - x$. Calculer $\mathrm{L}'(x)$.

2. Soit H la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $\mathrm{H}(x) = -\frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$.

Calculer $\mathrm{H}'(x)$.

3. On considère la fonction numérique *f* définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

Calculer $\left[f(x)\right]^2$. En déterminer, à l'aide de ce qui précède, une primitive.

⇨ Exercice 13

On considère la fonction *f* définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2. Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

3. Calculer $f'(x)$.

4. Étudier les variations de *f* sur son ensemble de définition.

⇨ Exercice 14

On considère la fonction *f* définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2. Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

3. Calculer $f'(x)$.

4. Étudier les variations de *f* sur son ensemble de définition.