Arbres à calculs
Probabilités conditionnelles

I. Probabilité conditionnelle

1. Conditionnement par un événement

2. Probabilité conditionnelle

★ Exercice 1

On donne $P(A)=0,2$; $P(B)=0,6$; $P(A\cup B)=0,7$.
Calculer $P(A\cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Correction :

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,2+0,6-0,7=0,1$.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,1}{0,6}=\frac{1}{6}.$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,1}{0,2}=\frac{1}{2}.$$

II. Événements indépendants

★ Exercice 2

On donne $P(A)=0,8$; $P(B)=0,3$; $P(A\cup B)=0,86$.
Calculer $P_B(A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Correction :

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,8+0,3-0,86=0,24$.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,24}{0,3}=\frac{24}{30}=\frac{\cancel{6}\times 4}{\cancel{6}\times 5}=\frac{4}{5}=0,8.$$

Deux événements A et B sont indépendants si :

① soit $P_B(A) = P(A)$,

② soit $P_A(B) = P(B)$,

③ soit $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P_B(A) = P(A)$. Les événements A et B sont indépendants.

III. Arbre à calculs

★ Exercice 3

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif 0,99 (sensibilité du test) ;
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et de T.

1. **a)** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. **a)** Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Correction :

1. **a)** Dans ce pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus : $P(V) = 0,02$.

La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est 0,99 : $P_V(T) = 0,99$.

La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 :
$P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,97$.

b) $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

Pour tous événements A et B : $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ ou bien $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})\times\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

2. V et $\overline{V}$ constituent un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T)=P(V)\times P_V(T)+P\left(\overline{V}\right)\times P_{\overline{V}}(T)=0,02\times 0,99+0,98\times 0,03=0,0198+0,0294=0,0492.$$

3. **a)** Dans cette question, il faut calculer $P_T(V)$.

$$P_T(V)=\frac{P(T\cap V)}{P(V)}=\frac{0,0198}{0,0492}\approx\frac{0,02}{0,05}=\frac{2}{5}=40\,\%.$$

b) Dans cette question, il faut calculer $P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)$.

$$P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)=\frac{P\left(\overline{T}\cap\overline{V}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(\overline{V}\right)\times P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{0,02\times 0,97}{1-0,0492}=\frac{0,0194}{0,9508}\approx\frac{0,02}{0,95}\approx 0,02=2\,\%.$$

IV. Formule des probabilités totales

1. Système complet d'événements finis

2. Formule des probabilités totales

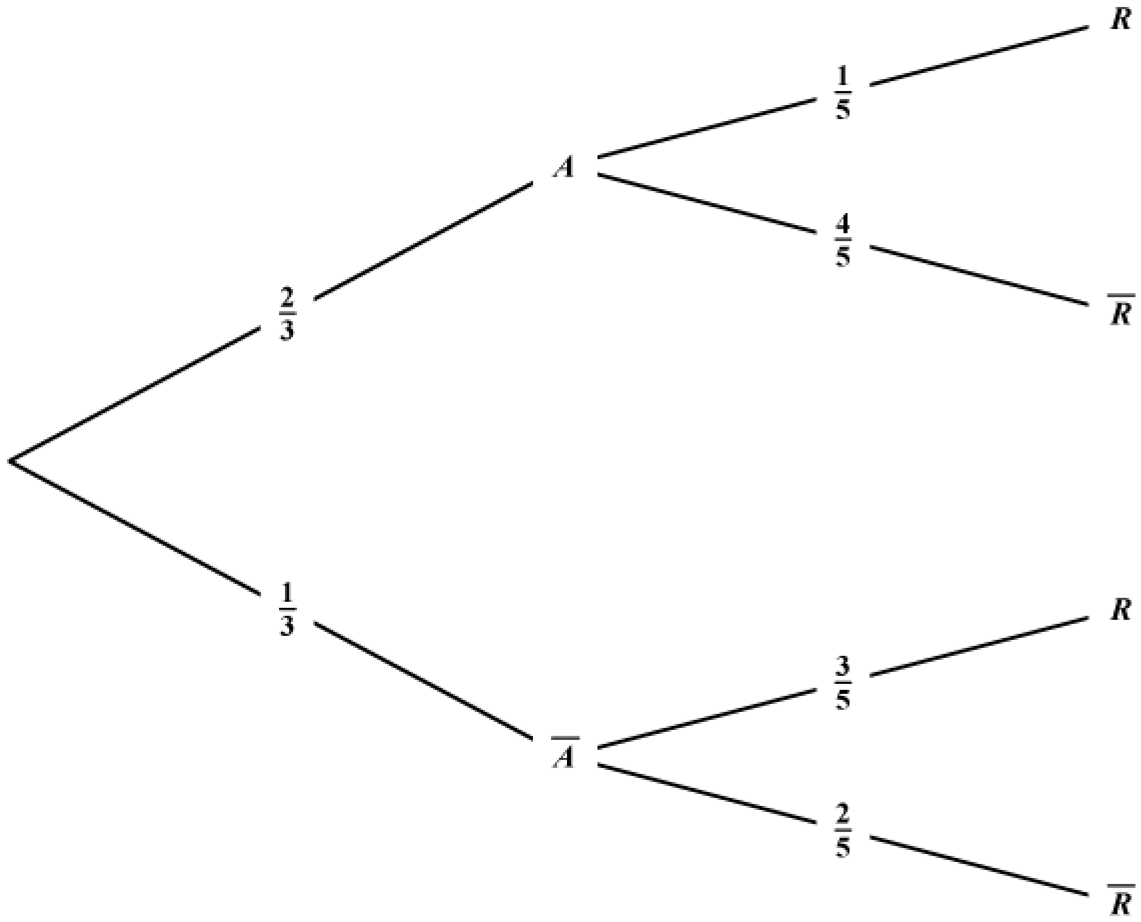
★ Exercice 4

Deux urnes contiennent chacune cinq boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge et 4 bleues dans l'urne A, 3 rouges et 2 bleues dans l'urne B. Un joueur doit choisir une urne et en tirer une boule ; le placement des urnes est tel que la probabilité de tirer dans l'urne A vaut $\frac{2}{3}$ alors qu'elle est de $\frac{1}{3}$ pour l'urne B. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

Correction :

Soit A l'événement : « on tire dans l'urne A ».
Soit B l'événement : « on tire dans l'urne B ».
Soit R l'événement : « on tire une boule rouge ».

L'énoncé permet de construire l'arbre suivant :



A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A) \times P_A(R) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R)$$

$$\Leftrightarrow \qquad P(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{\cancel{5} \times 1}{\cancel{5} \times 3} = \frac{1}{3}.$$

V. Expériences répétées

1. Expériences indépendantes

2. Simulation de lancers de pièces

3. Propriété admise

★ Exercice 5

On lance 10 fois une pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une Face ?

Correction :

Construire un tel arbre (10 lancers !) n'est pas recommandé.
De plus, il faudrait tenir compte de tous les chemins qui mènent à une face, deux faces, … , dix faces.
Il est beaucoup plus intéressant le considérer l'événement *contraire*.
Déterminons la probabilité de n'obtenir aucune face, c'est-à-dire de n'obtenir que des piles. Il y a un seul chemin qui mène à cela et la probabilité associée est, par principe multiplicatif : $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. Finalement, la probabilité cherchée est égale à : $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.