

Arbres à calculs
Probabilités conditionnelles
Exercices

Indépendance

★ **Exercice 6.1**

1. On donne $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(\overline{A \cup B}) = 0,35$. Calculer $P(A \cap B)$.
2. On donne $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,6$; $P(A \cup B) = 0,7$.
Calculer $P(A \cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
3. On donne $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,3$; $P(A \cup B) = 0,86$.
Calculer $P_B(A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
4. On donne $P(B \cap A) = \frac{1}{6}$; $P_A(B) = \frac{1}{4}$. Calculer $P(A)$.

Correction :



Pour tout événement E , $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.



Pour tous événements A et B on a : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Cette formule (qui porte le nom de formule du crible) s'écrit aussi :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1. $P(\overline{A \cup B}) = 0,35$. Donc $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,35 = 0,65$.

On en déduit : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,65 = 0,25$.



Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$.

Pour tout événement A , la probabilité de A sachant B est $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,6 - 0,7 = 0,1$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6} \text{ et } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}.$$



Deux événements A et B sont indépendants si :

- ① soit $P_B(A) = P(A)$,
- ② soit $P_A(B) = P(B)$,
- ③ soit $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

3. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,3 - 0,86 = 0,24$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,24}{0,3} = \frac{24}{30} = \frac{\cancel{3} \times 8}{\cancel{3} \times 10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Comme $P_B(A) = P(A)$, les événements A et B sont-ils indépendants.



On a : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

4. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = P(A) \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

★ Exercice 6.2

On lance deux dés cubiques équilibrés et on considère les événements

A : « La somme des faces est divisible par 3 »

B : « La somme des faces est inférieure ou égale à 8 »

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Incompatibles ?

Correction :



Deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

On a donc $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Tableau de la somme de deux dés

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



A



B

Sur les 36 résultats possibles, 12 correspondent à « la somme des faces est divisible par 3 ».

$$\text{Donc } P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Sur les 36 résultats possibles, 26 correspondent à « la somme des faces est inférieure ou égale

$$\text{à } 8 \text{ »}. \text{ Donc } P(B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

7 résultats sont communs aux événements A et B .

Donc $A \cap B \neq \emptyset$ et les événements A et B ne sont pas incompatibles.

$$\text{De plus } P(A \cap B) = \frac{7}{36}.$$

$$\text{Enfin, } P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{18} = \frac{13}{54} \neq \frac{7}{36}, \text{ c'est-à-dire } P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B).$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Arbre à calculs et probabilités conditionnelles

★ Exercice 6.3

Un constructeur automobile fabrique des moteurs pour des voitures de compétition courant en Formule 1. La probabilité qu'un de ces moteurs n'ait pas de défaut (et donc ne casse pas lors d'un grand prix) est égale à 0,8.

Avant chaque grand prix, un contrôle sévère est effectué mais ce contrôle n'est pas infaillible.

En effet :

- un moteur sans défaut est utilisé dans 90% des cas ;
- un moteur ayant un défaut est rejeté dans 80% des cas.

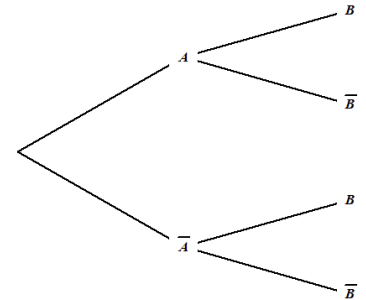
On prélève au hasard un moteur de la production du constructeur.

1. Calculer la probabilité de l'événement : « le moteur a un défaut et est utilisé ».
2. Calculer la probabilité qu'un moteur soit utilisé.
3. Calculer la probabilité que le moteur n'ait pas de défaut sachant qu'il a été rejeté par le contrôle.

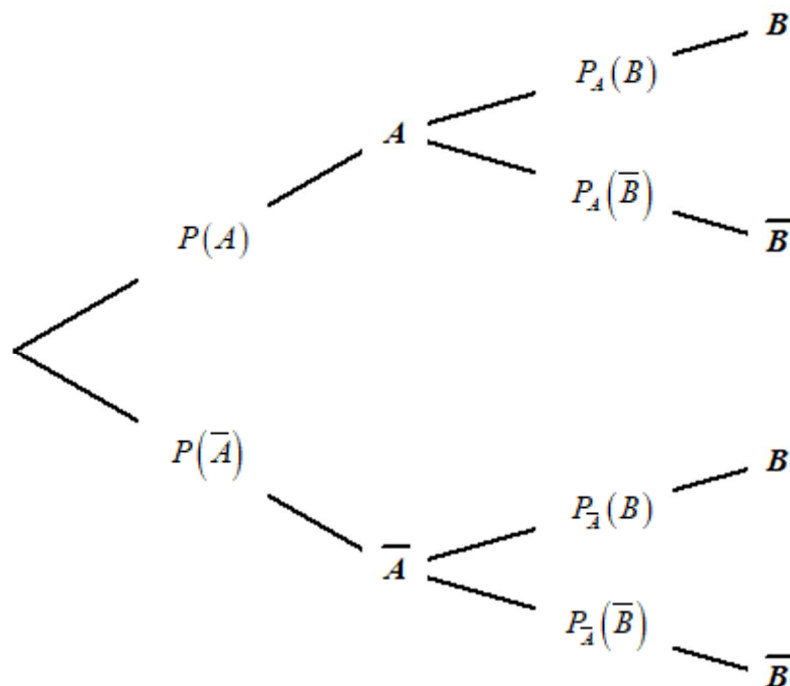
Correction :**Arbre de probabilités :**

On considère un premier événement A qui est suivi par un deuxième événement B .

Si $\bar{A}$ correspond à l'événement contraire de A et $\bar{B}$ correspond à l'événement contraire de B , on peut représenter la situation par le schéma ci-contre :



On améliore cet arbre en *pondérant* les branches par les probabilités correspondantes à chacun des événements. On a alors :



- ① La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- ② La probabilité d'un événement conjoint est obtenue en parcourant les branches de l'arbre qui passent par les deux événements considérés et en appliquant le principe multiplicatif :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad ; \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \quad ; \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$$

- ③ La probabilité de B est obtenue en faisant la somme des produits des branches qui mènent à B . Il s'agit de la formule des probabilités totales dont voici la rédaction complète :

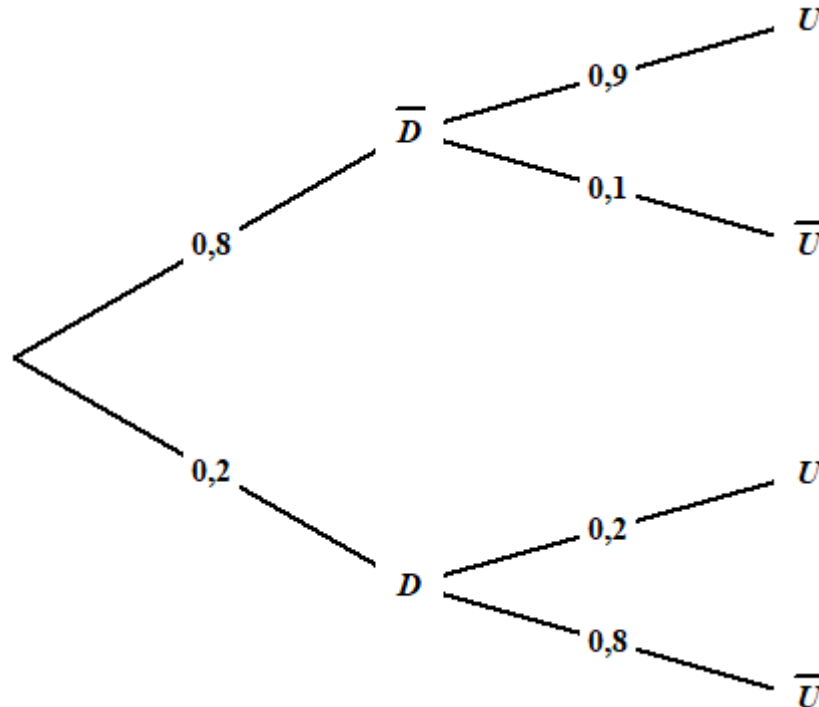
A et $\bar{A}$ constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

➤ On a aussi : $P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$.

Soit D l'événement : « le moteur a un défaut ».

Soit U l'événement : « le moteur est utilisé ».

L'énoncé permet de construire l'arbre de probabilités suivant :



1. Calculer la probabilité de l'événement : « le moteur a un défaut et est utilisé » est :

$$P(D \cap U) = P(D) \times P_D(U) = 0,2 \times 0,2 = 0,04.$$

2. D et $\overline{D}$ constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales

$$P(U) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(U) + P(D) \times P_D(U) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,2 = 0,72 + 0,04 = 0,76.$$

3. On demande la probabilité : $P_{\overline{U}}(\overline{D})$. Cette probabilité n'apparaît pas sur l'arbre.

On la calcule à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\overline{U}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{U})}{P(\overline{U})}.$$

$$\text{Or, } P(\overline{D} \cap \overline{U}) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(\overline{U}) = 0,8 \times 0,1 = 0,08.$$

$$\text{De plus, d'après la question précédente : } P(\overline{U}) = 1 - P(U) = 1 - 0,76 = 0,24.$$

$$\text{Finalement : } P_{\overline{U}}(\overline{D}) = \frac{0,08}{0,24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

Un moteur sur 3 rejetés est sans défaut ! On peut se poser des questions sur la qualité du contrôle...

★ Exercice 6.4

On suppose qu'un test T permet de diagnostiquer une maladie M de façon à ce que : la probabilité pour qu'un sujet malade ait un test positif est égale à 0,9 et, la probabilité pour qu'un sujet sain ait un test négatif est égale à 0,9.

Sachant que la probabilité d'être malade est de 1 % :

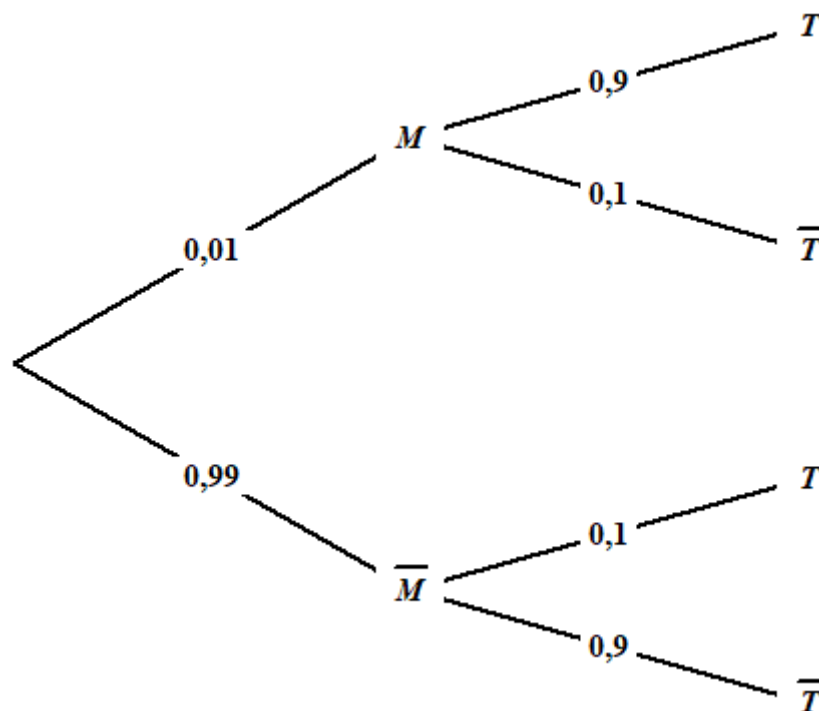
1. Quelle est la probabilité d'avoir un test positif ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un sujet ayant un test positif ait réellement la maladie ?

Correction :

Soit M l'événement : « le sujet est malade ».

Soit T l'événement : « le test est positif ».

L'énoncé permet de construire l'arbre de probabilités suivant :



1. M et $\overline{M}$ constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,1 = 0,009 + 0,099 = 0,108.$$

2. On demande la probabilité : $P_T(M)$. Cette probabilité n'apparaît pas sur l'arbre.

On la calcule à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,01 \times 0,9}{0,108} = \frac{0,009}{0,108} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12}.$$

★ Exercice 6.5 : devoir à la maison

Trois machines à fabriquer des comprimés, A, B et C, produisent respectivement 50, 30 et 20% du nombre total de comprimés fabriqués dans une industrie pharmaceutique. Les pourcentages de comprimés défectueux de ces machines sont respectivement 3, 4 et 5 %.

1. Si on prend un comprimé au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un comprimé défectueux pris au hasard, ait été produit par la machine A ?

Parcours vert : Déterminer la probabilité que le comprimé soit défectueux ou produit par la machine A

Correction :

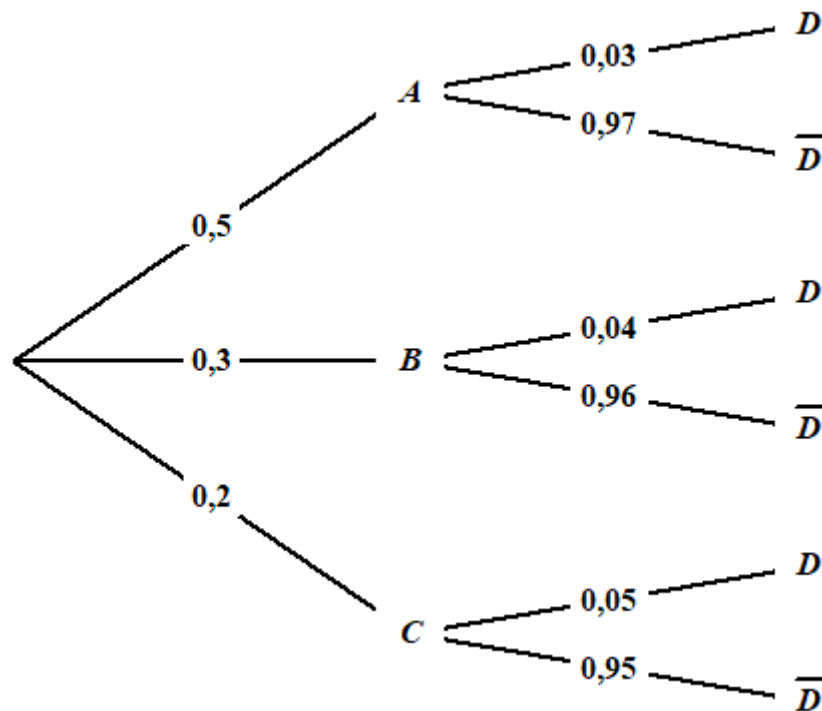
Soit A l'événement : « le comprimé est fabriqué par la machine A ».

Soit B l'événement : « le comprimé est fabriqué par la machine B ».

Soit C l'événement : « le comprimé est fabriqué par la machine C ».

Soit D l'événement : « le comprimé est défectueux ».

L'énoncé permet de construire l'arbre de probabilités suivant :



1. A, B et C constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$

$$\Leftrightarrow P(D) = 0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,015 + 0,012 + 0,010 = 0,037.$$

2. On demande la probabilité : $P_D(A)$. Cette probabilité n'apparaît pas sur l'arbre.

On la calcule à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0,5 \times 0,03}{0,037} = \frac{0,015}{0,037} = \frac{15}{37}.$$

Parcours vert : On demande $P(A \cup D)$.

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0,500 + 0,037 - 0,015 = 0,522.$$

★ Exercice 6.6

Dans une loterie, une roue présente des secteurs gagnants.

À chaque lancer de roue, la probabilité de gagner est 0,1 et ne dépend pas du lancer précédent.

On joue quatre fois de suite.

1. Déterminer la probabilité de gagner exactement une fois.
2. Déterminer la probabilité de gagner au moins une fois.

Correction :

Il n'est pas nécessaire, ici, de construire l'arbre car il est très imposant.

On l'imagine « dans sa tête ». Il est constitué de 16 *chemins*.

1. 4 chemins permettent de gagner exactement une fois (gagné-perdu-perdu-perdu ; perdu-gagné-perdu-perdu ; perdu-perdu-gagné-perdu ; perdu-perdu-perdu-gagné).

Pour chacun de ces 4 chemins, on gagne une fois avec la probabilité 0,1 et on perd trois fois avec la probabilité 0,9.

Par principe multiplicatif, la probabilité d'un chemin est : $0,1 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,1 \times 0,9^3$.

En tenant compte des 4 chemins, la probabilité de gagner exactement une fois est $4 \times 0,1 \times 0,9^3$.

2. L'événement contraire est : « ne jamais gagner ».

La probabilité de ne jamais gagner, c'est-à-dire de toujours perdre, est $0,9^4$.

Finalement, la probabilité de gagner au moins une fois est $1 - 0,9^4$.

★ Exercice 6.7

Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 55 % des élèves possèdent un ordinateur. Parmi les élèves qui ont un ordinateur, 98 % possèdent un téléphone portable. De plus, parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur. Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au centième donc les pourcentages à l'unité. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : on choisit au hasard un élève de ce lycée. On note M l'évènement : « L'élève possède un ordinateur » ; T l'évènement : « L'élève possède un téléphone portable » ; $\overline{M}$ l'évènement contraire de M ; $\overline{T}$ l'évènement contraire de T .

1. a) Calculer la probabilité que l'élève possède un ordinateur et un téléphone portable.
b) En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable.
2. a) On prend 0,90 comme valeur de la probabilité de l'évènement T .
Calculer la probabilité que l'élève ne possède pas d'ordinateur mais possède un téléphone portable.
b) En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable sachant qu'il ne possède pas d'ordinateur.

Partie B : on choisit trois élèves au hasard, indépendamment les uns des autres.

On note E l'évènement : « Exactement deux des trois lycéens choisis possèdent un ordinateur ». Calculer la probabilité de l'évènement E .

Correction :

Partie A :

1. a) La probabilité que l'élève possède un ordinateur et un téléphone portable est :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,55 \times 0,98 = 0,539.$$

$$\text{b) } P(T) = \frac{P(M \cap T)}{P_T(M)} = \frac{0,539}{0,6} = \frac{539}{600} \approx \frac{540}{600} = \frac{54}{60} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

2. a) On demande $P(\overline{M} \cap T)$.

Or, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M} \cap T) = P(T) - P(M \cap T) = 0,900 - 0,539 = 0,361.$$

b) On demande $P_{\overline{M}}(T)$.

$$P_{\overline{M}}(T) = \frac{P(\overline{M} \cap T)}{P(\overline{M})} = \frac{P(\overline{M} \cap T)}{1 - P(M)} \approx \frac{0,361}{0,45} = \frac{361}{450} \approx \frac{360}{450} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Partie B :

Il y a trois configurations possibles :

ordinateur – ordinateur – pas d'ordinateur

ordinateur – pas d'ordinateur – ordinateur

pas d'ordinateur – ordinateur – ordinateur

La probabilité de l'événement E est donc : $3 \times 0,45 \times 0,55^2$.

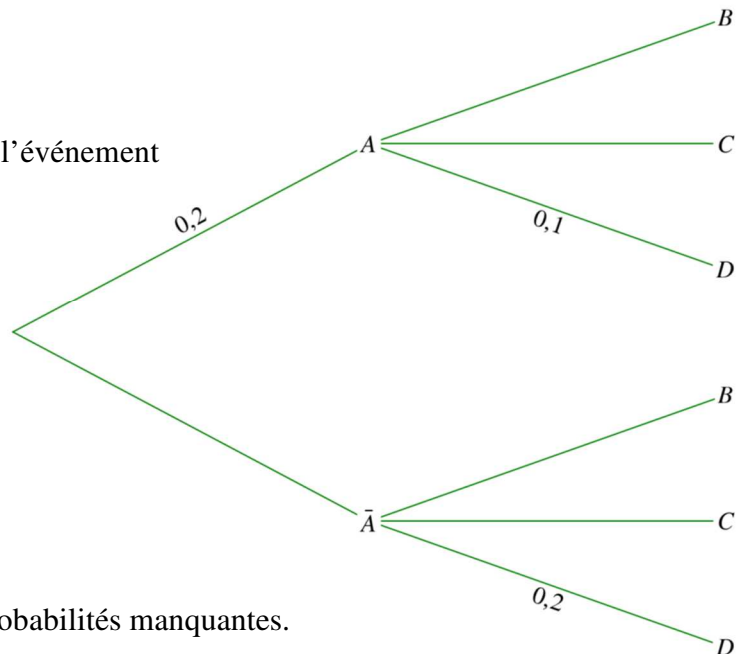
★ Exercice 6.8

A, B, C, D désignent des événements, $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A .

On sait que :

- la probabilité de l'événement B est égale à 0,4 ;
- $P(\overline{A} \cap C) = 0,4$.

Calculer, en explicitant les calculs, les probabilités manquantes.



Correction :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

$$P_{\overline{A}}(C) = \frac{P(\overline{A} \cap C)}{P(\overline{A})} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5.$$

$$P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}(C) - P_{\overline{A}}(D) = 1 - 0,5 - 0,2 = 0,3.$$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0,4 - 0,8 \times 0,3 = 0,4 - 0,24 = 0,16 \text{ (FPT).}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,16}{0,2} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

$$\text{Enfin, } P_A(C) = 1 - P_A(B) - P_A(D) = 1 - 0,8 - 0,1 = 0,1.$$