Arbres à calculs
Probabilités conditionnelles

I. Probabilité conditionnelle

1. Conditionnement par un événement

Soit P une probabilité sur un univers E et A un événement tel que P (A) ≠ 0.

Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Remarque :

Le réel $P_A(B)$ correspond à la probabilité de B sachant que A est lui-même déjà réalisé (A n'est donc pas impossible, conformément à la condition P (A) ≠ 0).

2. Probabilité conditionnelle

Soit P une probabilité sur un univers E et A un événement tel que P (A) ≠ 0.

- L'application qui à tout événement B associe le réel $P_A(B)$ est une probabilité sur l'univers E, appelée probabilité conditionnelle sachant A. On a en particulier :
  pour tout événement B , $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
- De plus, on a : $P_A(A) = 1$; si A et B sont incompatibles, alors $P_A(B) = 0$.

★ Exercice 1

On donne $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,6$; $P(A \cup B) = 0,7$.

Calculer $P(A \cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Au jeu, l'objectif du tricheur est d'obtenir un conditionnement : sachant qu'il a vu l'as de trèfle dans le jeu de son voisin de gauche, la probabilité que son voisin de droite dispose d'un carré d'as devient nulle...

II. Événements indépendants

Soit P une probabilité sur un univers E.

- Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si P (A) ≠ 0 et P (B) ≠ 0, on a A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$.

★ **Exercice 2**

On donne $\mathrm{P(A)} = 0{,}8$; $\mathrm{P(B)} = 0{,}3$; $\mathrm{P(A \cup B)} = 0{,}86$.
Calculer $\mathrm{P_B(A)}$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Lorsque deux événements A et B sont de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

III. Arbre à calculs

★ **Exercice 3**

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif 0,99 (sensibilité du test) ;
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et de T.

1. a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

IV. Formule des probabilités totales

1. Système complet d'événements finis

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier supérieur ou égal à 2.
Les événements A_1, A_2, …, A_n forment un système complet de Ω si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout i de $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$, $A_i \neq 0$;
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

<u>Remarques</u> :
- La notion géométrique correspondante à celle de la partition est celle de "pavage".
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$, A et $\overline{A}$ forment un système complet de Ω.

2. Formule des probabilités totales

Soit A_1, A_2, …, A_n une partition d'événements de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles, et B un événement quelconque contenu dans Ω. On a :
$P(B) = P_{A_1}(B) . P(A_1) + P_{A_2}(B) . P(A_2) + \ldots + P_{A_n}(B) . P(A_n)$.

★ **Exercice 4**

Deux urnes contiennent chacune cinq boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge et 4 bleues dans l'urne A, 3 rouges et 2 bleues dans l'urne B. Un joueur doit choisir une urne et en tirer une boule ; le placement des urnes est tel que la probabilité de tirer dans l'urne A vaut $\frac{2}{3}$ alors qu'elle est de $\frac{1}{3}$ pour l'urne B. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

<u>Remarque</u> :
Intérêt dans le contrôle de qualité, en économie, en industrie, en médecine ou en pharmacie.

V. Expériences répétées

1. Expériences indépendantes

Lors de la répétition d'expériences aléatoires, on dira qu'elles sont indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le déroulement des autres.

Exemples :
- tirages successifs avec remise de boules dans une urne. (dés, loto, …).
- ce n'est pas le cas de tirages successifs sans remise de boules dans une urne. (tiercés, …).

2. Simulation de lancers de pièces

On donne une simulation de taille cent de deux lancers répétés d'une pièce équilibrée.
(0 correspond à FACE et 1 représente PILE.)
Les résultats obtenus sont donc :

FF	FP	PF	PP
25	31	22	22

Le résultat le plus conforme à l'intuition est celui de FF. En effet, sur 100 lancers, il est "prévisible" qu'environ 50 commencent par F, et parmi ces 50 lancers, la moitié "devrait" se terminer par F.

La fréquence "prévisible" de FF est donc de 0,25, et est égale au produit $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ des probabilités d'apparition de F pour chacune des expériences.
On admettra ce principe multiplicatif lors de la répétition d'expériences indépendantes.

3. Propriété admise

Lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun de ces résultats.

★ Exercice 5

On lance 10 fois une pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une Face ?