

Activité : Limites de fonctions usuelles

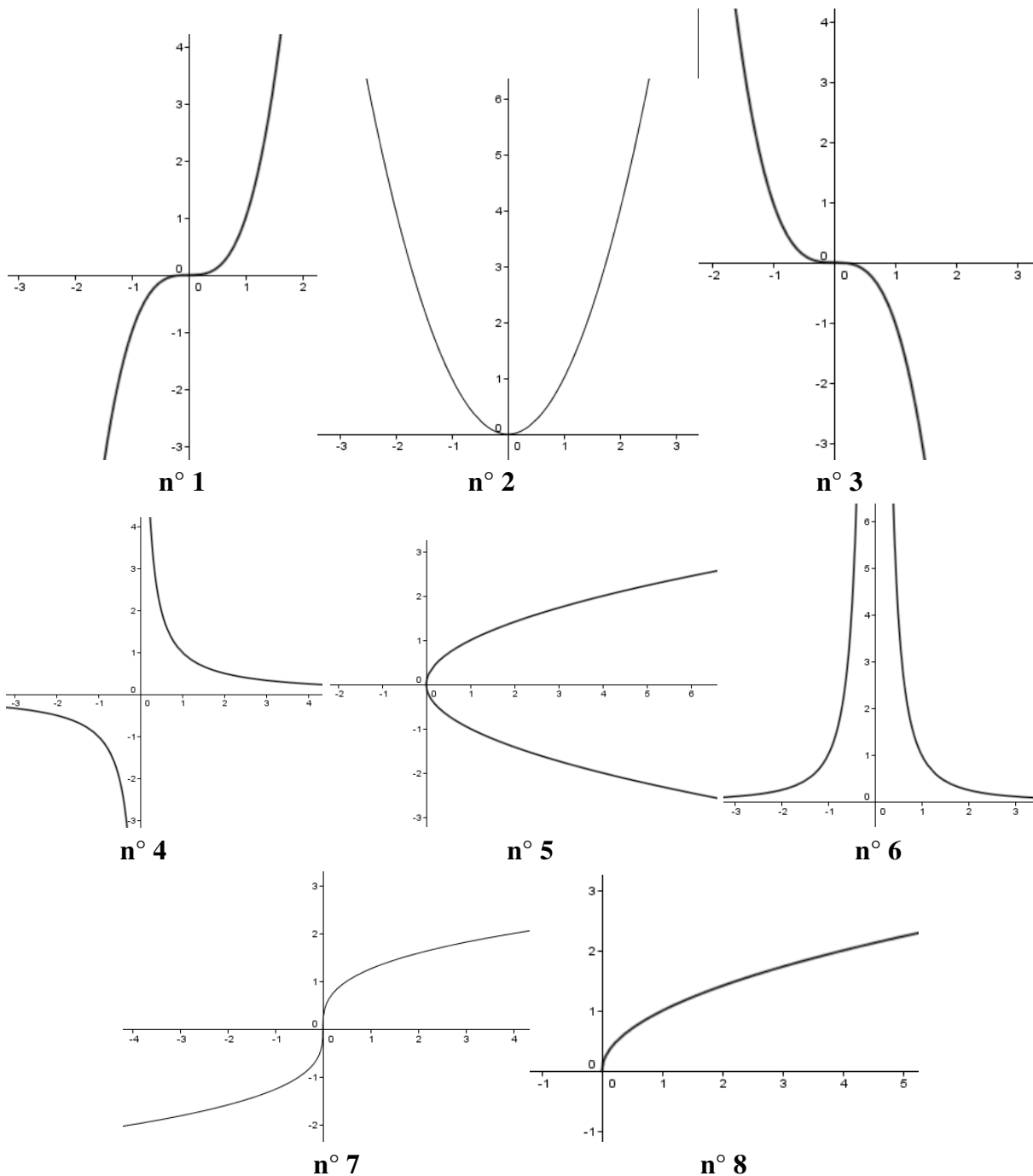
Voici 8 représentations graphiques. Reconnaître celles qui correspondent aux fonctions suivantes :

La courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ est la courbe n° 2

La courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ est la courbe n° 1

La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la courbe n° 4

La courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est la courbe n° 8



En utilisant les graphiques précédents, indiquer les limites des fonctions usuelles citées.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Dérivation

I. Dérivabilité

II. Dérivées des fonctions polynômes

La dérivée de $x \rightarrow 1$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 1$.

La dérivée de $x \rightarrow x$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 1$.

La dérivée de $x \rightarrow x^2$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 2x$.

La dérivée de $x \rightarrow x^3$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 3x^2$.

La dérivée de $x \rightarrow x^n$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow nx^{n-1}$.

La dérivée de $x \rightarrow x+1$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 1$.

La dérivée de $x \rightarrow x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 2x + 1$.

La dérivée de $x \rightarrow x^3 + x^2 + 7x + 5$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 3x^2 + 2x + 7$.

La dérivée de $x \rightarrow 2x^3 + 3x^2$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 6x^2 + 6x$.

La dérivée de $x \rightarrow 2x^3 - x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \rightarrow 6x^2 - 2x$.

III. Application importante : dérivée et variation

Exemples :

1. Étude des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 5$.
2. Étude des variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$.

Correction :

1. ① Calcul de la dérivée : $f'(x) = 2x - 3$

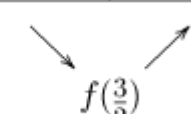
- ② Signe de la dérivée, et ③ tableau des variations de la fonction

$$2x - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

On en déduit :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

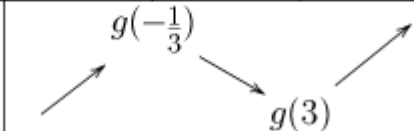
2. ① Calcul de la dérivée : $g'(x) = 3x^2 - 8x - 3$
 ② Signe de la dérivée, et ③ tableau des variations de la fonction
 $a = 3$, $b = -8$ et $c = -3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 64 + 36 = 100 = 10^2 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 10}{2 \times 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 10}{2 \times 3} = \frac{18}{6} = 3.$$

$g'(x)$ est du signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g					

★ **Exercice :**

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 + 2x$.
 2. Démontrer que l'équation $x^5 + 2x = 1$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$

Correction :

1. ① Calcul de la dérivée : $f'(x) = 5x^4 + 2$
 ② Signe de la dérivée, et ③ tableau des variations de la fonction
 $f'(x) \geq 0$ comme somme de deux termes positifs.

On en déduit :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f		

2. Considérons le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

$$f(0) = 0^5 + 2 \times 0 = 0 \text{ et } f(1) = 1^5 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3.$$

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0	3

L'équation s'écrit $f(x) = 1$.

Les conditions d'application du théorème de la bijection sont réunies.

- f est continue sur $[0 ; 1]$.
- f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.
- $f([0, 1]) = [0, 3]$, donc $1 \in f([0, 1])$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $x^5 + 2x = 1$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.