Version ECP1

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les fiches indispensables

en mathématiques

Julien Fernandez

Fonctions et Intégration

I. Premières fonctions usuelles

★ Fonctions affines :

- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.
  a est le coefficient directeur, *b* est l'ordonnée à l'origine.

- Dans un repère, la représentation graphique de *f* est la droite d'équation $y = ax + b$.

- $\boxed{\textbf{Signe de } ax+b \textbf{ :}}$

Si $a > 0$, $\quad ax + b \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad ax \geq -b$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{-b}{a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$, $\quad ax + b \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad ax \geq -b$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{-b}{a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

- Variations :
  Si $a > 0$, *f* est croissante, si $a < 0$ *f* est décroissante.

★ **Fonctions polynômes du second degré :**

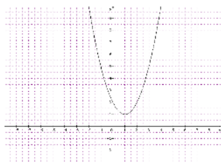
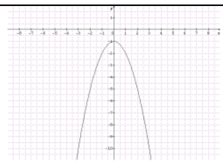
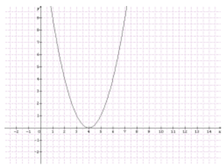
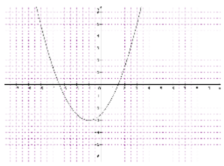
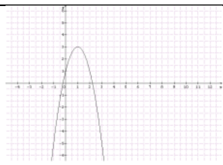
- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- cas où $c = 0$: $f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$ (on a factorisé par *x*)
  0 et $-b/a$ sont racines « évidentes ».
  Exemple : $\quad x^2 + 2x = x(x+2)$. 0 et -2 sont racines.

- cas où on reconnait $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
  Exemples : $\quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. 3 et -3 sont racines.
  $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont racines.
  $3x^2 - 1 = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$. $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$ sont racines.

- cas où on reconnait $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.
  Exemple : $\quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. -1 est la seule racine (double).

- Cas général : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

	Résolution de l'équation	**Factorisation de** ax^2+bx+c	**Signe et représentation graphique**	
			$a>0$	$a<0$
$\Delta<0$	**Pas de solution**	**Pas de factorisation.**		
			ax^2+bx+c **est du signe de** a	
$\Delta=0$	**Une racine double :** $x_0=\dfrac{-b}{2a}$	$a\left(x-x_0\right)^2$		
			ax^2+bx+c **est du signe de** a	
$\Delta>0$	**Deux racines distinctes :** $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$		
			ax^2+bx+c **est du signe de** a **à l'extérieur des racines et du signe de** $-a$ **à l'intérieur des racines**	

II. Étude des variations d'une fonction & Dérivées

★ La technique la plus courante pour étudier les variations d'une fonction *f* est la suivante :

- On dérive la fonction $f(x)$.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On en déduit les variations de *f*.

★ Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

★ Dérivées et opérations :

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k \cdot v'}{v^2} \text{ où } v(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ où } v(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

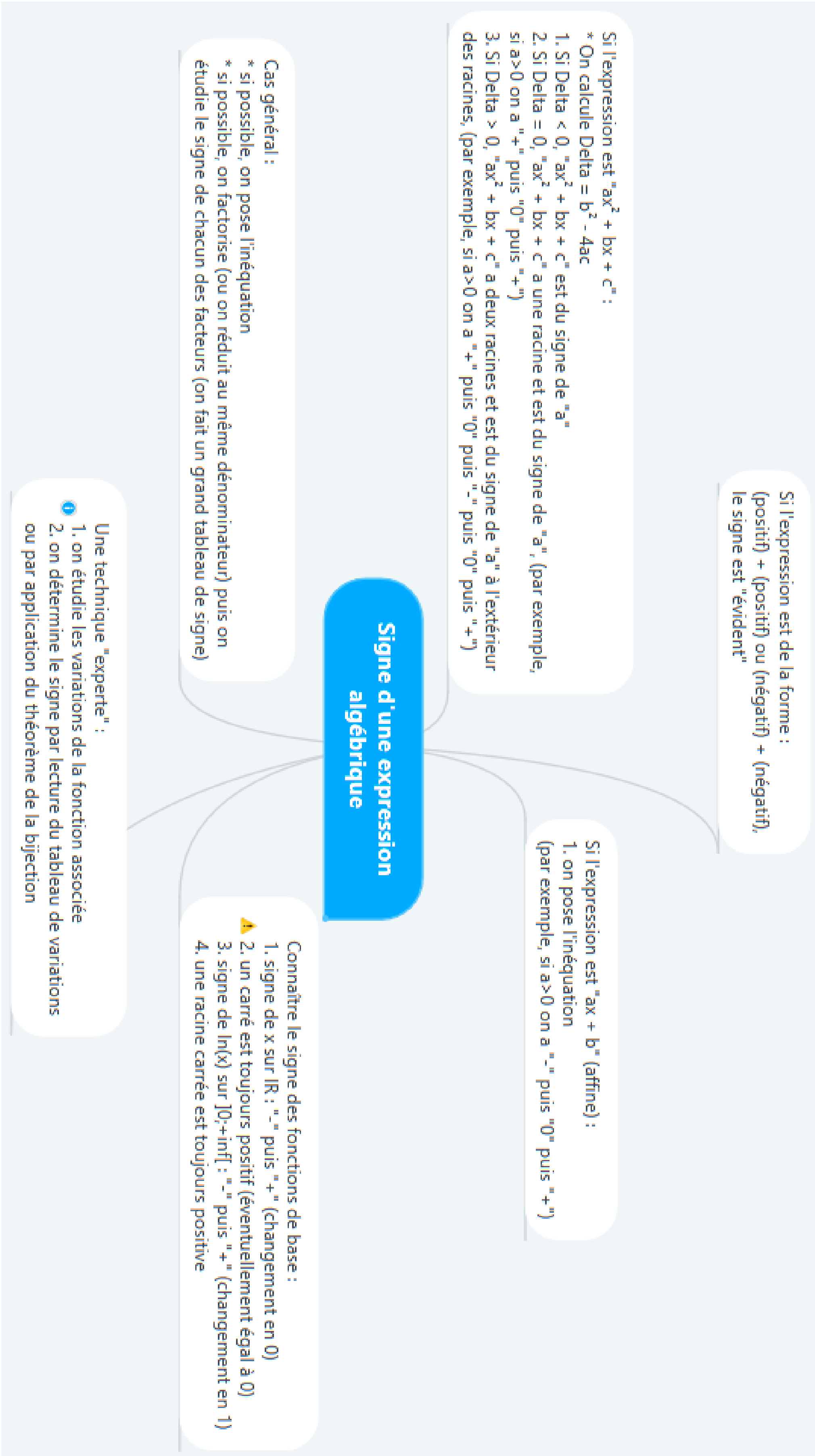
★ Autres formules :

$$\left(u^2\right)' = 2u'u \ ; \ \left(u^3\right)' = 3u'u^2 \ ; \ \left(u^n\right)' = n\,u'\,u^{n-1}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{k}{u^n}\right)' = -n\,\frac{k\,u'}{u^{n+1}}$$

★ Étude du signe d'une expression :



III. Limites

★ Limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

★ Opération sur les limites

- Somme :

  Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Différence :

  Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty \end{array}\right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

(on a utilisé : $f(x) = \dfrac{4}{x} + \left(-2x^2\right)$)

- Produit :

  Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = x\left(4 + \dfrac{2}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4 + \dfrac{2}{x} = 4 \end{array}\right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Composée :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)^3$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=\mathbf{2}\\ \bullet\ \lim\limits_{X\to\mathbf{2}} X^3=8\end{array}\right\}\text{ par composée de limites, } \lim_{x\to+\infty} f(x)=8$$

★ Limites d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini

On applique la règle du monôme de plus haut degré.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+2x-5=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x}{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+4}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=0$.

★ Limites en une valeur interdite au dénominateur

- Sauf cas exceptionnel, la limite sera ∞.
- On étudie le signe du dénominateur.
- On applique la règle des signes pour savoir si le résultat est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : déterminons $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-2x^2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-2x^2}{x-1}$.

On détermine d'abord le signe du dénominateur :

$x-1\geq0\Leftrightarrow x\geq1$, d'où

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

Dès lors,

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-2x^2}{x-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-2x^2}{x-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$.

★ **Interprétations graphiques : asymptotes horizontales et verticales**

- Si *f* a pour limite ℓ, en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$, est asymptote horizontale à la courbe de *f*.

- Si *f* a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), en a^+ ou en a^-, on dit que la droite d'équation $x = a$, est asymptote verticale à la courbe de *f*.

★ **Théorèmes sur les limites**

f, *g*, *h* désignent des fonctions, *l* et l' deux réels, et *a* un réel ou +∞ ou -∞.

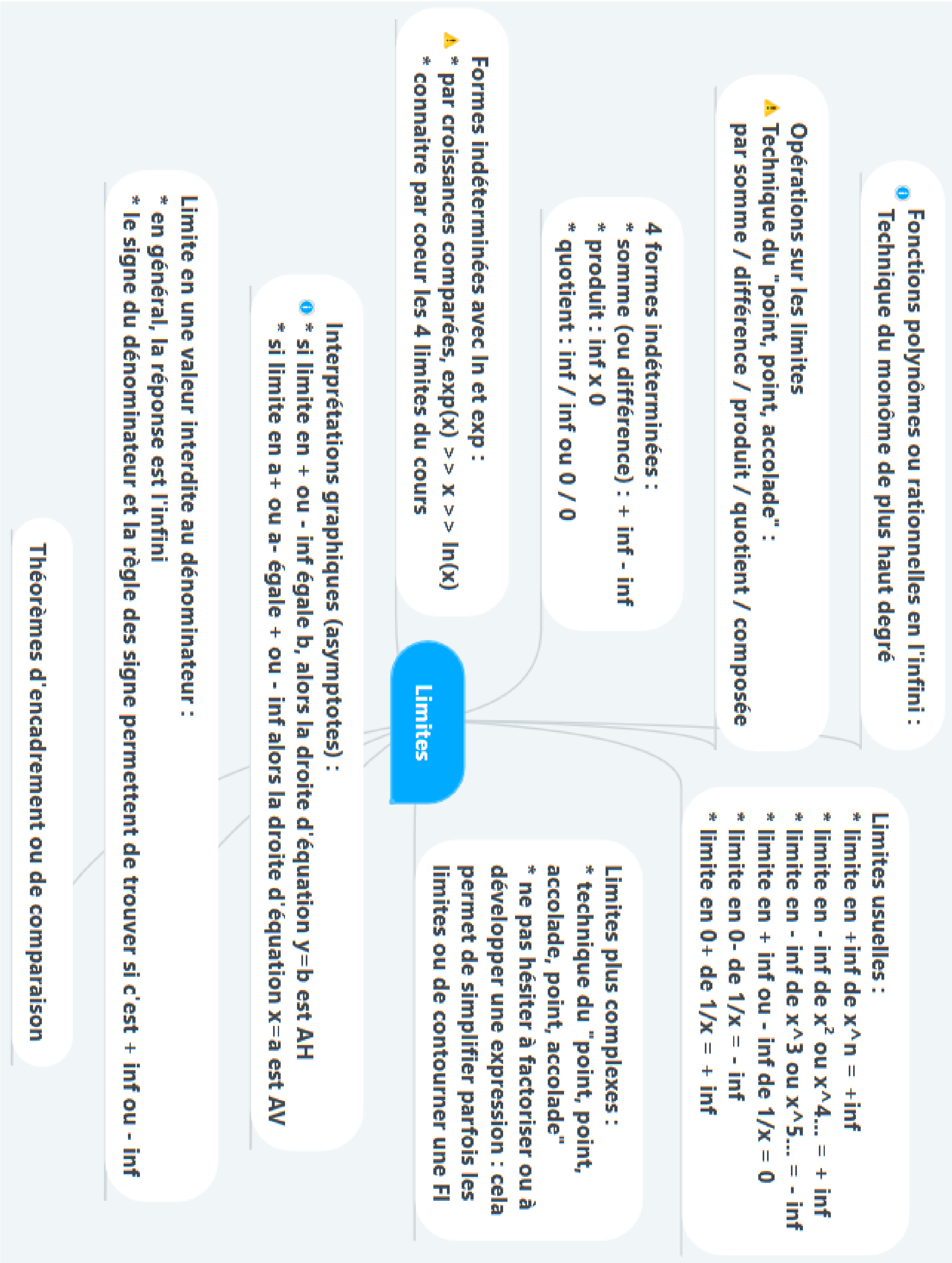
- Compatibilité avec l'ordre
  Soient *f* et *g* deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle et soient $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

- **Théorème d'encadrement (ex "gendarmes")**
  Si $g \leq f \leq h$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

- Autres théorèmes de comparaison
  - Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ (théorème de minoration).
  - Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ (théorème de majoration).

- **Théorème de la limite monotone :**
  Si *f* est croissante et majorée sur l'intervalle $]a, b[$, alors *f* admet une limite finie en *b*.
  Si *f* est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors *f* admet une limite finie en *a*.
  Si *f* est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors *f* admet pour limite $+\infty$ en *b*.
  (cas analogues avec *non minorée* et/ou *décroissante*)

★ **Synthèse :**


Limites
Fonctions polynômes ou rationnelles en l'infini :
Technique du monôme de plus haut degré
Opérations sur les limites
Technique du "point, point, accolade" :
par somme / différence / produit / quotient / composée
4 formes indéterminées :
* somme (ou différence) : + inf - inf
* produit : inf x 0
* quotient : inf / inf ou 0 / 0
Formes indéterminées avec ln et exp :
* par croissances comparées, exp(x) >> x >> ln(x)
* connaitre par coeur les 4 limites du cours
Interprétations graphiques (asymptotes) :
* si limite en + ou - inf égale b, alors la droite d'équation y=b est AH
* si limite en a+ ou a- égale + ou - inf alors la droite d'équation x=a est AV
Limite en une valeur interdite au dénominateur :
* en général, la réponse est l'infini
* le signe du dénominateur et la règle des signe permettent de trouver si c'est + inf ou - inf
Théorèmes d'encadrement ou de comparaison
Limites usuelles :
* limite en +inf de x^n = +inf
* limite en - inf de x² ou x^4... = + inf
* limite en - inf de x^3 ou x^5... = - inf
* limite en + inf ou - inf de 1/x = 0
* limite en 0- de 1/x = - inf
* limite en 0+ de 1/x = + inf
Limites plus complexes :
* technique du "point, point, accolade"
* ne pas hésiter à factoriser ou à développer une expression : cela permet de simplifier parfois les limites ou de contourner une FI

IV. Questions « classiques »

★ Déterminer une équation de tangente

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$
- de sa dérivée $f'(x)$
- d'une abscisse a

<u>Rédaction « type »</u>

- On calcule $f(a)$.
- On calcule $f'(a)$.
- Une équation de la tangente (phrase de l'énoncé…) est :
  $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

★ Montrer que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$
- d'une droite d'équation $y = ax+b$

<u>Rédaction « type »</u>

- On calcule $f(x)-(ax+b)$.
- On montre que $\lim\limits_{+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ou $\lim\limits_{-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ selon le cas.

★ Étudier la position relative d'une courbe et d'une droite

On dispose :
- d'une fonction $f(x)$ dont la courbe C est donnée
- d'une droite D d'équation $y = ax + b$

Rédaction « type »

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On détermine le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors C est au-dessus de D.

  Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors C est au-dessous de D.

★ Équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ … ou équation $g(x) = k$, k réel (théorème de la bijection).

On dispose :
- du tableau de variation complet de la fonction g

Rédaction « type »

- g est continue sur $]a\,,\,b[$ car dérivable sur $]a\,,\,b[$
- g est strictement croissante (ou décroissante) sur $]a\,,\,b[$.
- $0 \in g(]a\,,\,b[) =]c\,,\,d[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur $]a\,,\,b[$.

Autre version :

- g est continue sur $]a\,,\,b[$ car dérivable sur $]a\,,\,b[$
- g est strictement croissante (ou décroissante) sur $]a\,,\,b[$.
- $0 \notin g(]a\,,\,b[) =]c\,,\,d[$

L'équation $g(x) = 0$ ne possède donc pas de solution sur $]a\,,\,b[$.

Remarque : bijection

Soit $f : \left| \begin{array}{l} [a,b] \to [c,d] \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$. Si f est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante), alors f réalise une bijection de $[a,b]$ dans $[c,d]$.

★ Montrer que $\alpha \in [m, M]$

On dispose :

- du fait que α est solution unique de l'équation $g(x) = 0$
- de la stricte monotonie de g

Rédaction « type » (cas où g est strictement croissante)

- $g(m) = ... < 0$
- $g(\alpha) = 0$ par construction
- $g(M) = ... > 0$

Donc $g(m) < g(\alpha) < g(M)$.

Or, g est strictement croissante sur $[m, M]$.

On en déduit que $m < \alpha < M$.

★ Parité

- Une fonction f, définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est paire lorsque :
  - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
  - pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$

- Une fonction f, définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est impaire lorsque :
  - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
  - pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$

V. Fonctions logarithme et exponentielle

★ Fonction logarithme

- La fonction logarithme népérien est l'unique fonction qui a pour dérivée $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note ln.

- Conséquences immédiates :
  - ✓ ln est définie sur $]0\,;+\infty[$. Elle n'est pas définie en 0, ni pour les nombres négatifs.
  - ✓ $\ln 1 = 0$
  - ✓ ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

- $\boldsymbol{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$.

- **Formules**

  $\ln ab = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{1}{a} = -\ln a \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln a^n = n\ln a$

- **Variations et signe**

  f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

  Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, $\ln x > 0$. Pour tout x de $]0\,;1[$, $\ln x < 0$.

- **Limites**

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale d'équation $x = 0$).

  Exemple 1 : déterminer $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2 - \ln x\right)$.

  $$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to0} x^2 = 0 \\ &\bullet \lim_{x\to0} -\ln x = +\infty \end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{par somme de limites,}\\ &\lim_{x\to0}\left(x^2-\ln x\right) = +\infty\end{aligned} \qquad \text{(on a utilisé : } x^2 - \ln x = x^2 + (-\ln x)\text{)}$$

  Exemple 2 : déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln x}{x}$.

  $$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ &\bullet \lim_{x\to0} \ln x = -\infty \end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{par produit de limites,}\\ &\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{x} = -\infty\end{aligned} \qquad \text{(on a utilisé : } \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\times\ln x\text{)}$$

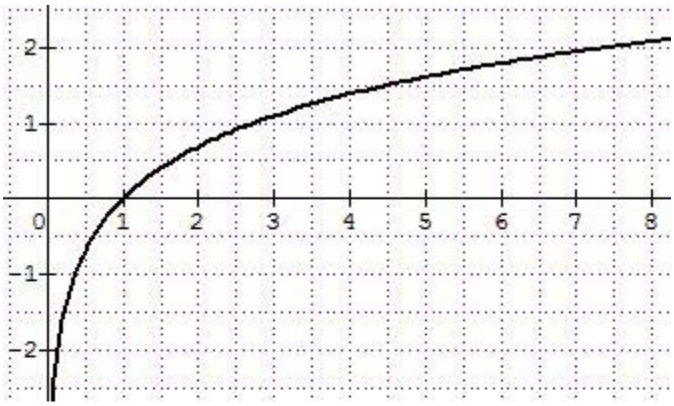
- **Croissances comparées**

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$: à l'infini, toute puissance de *x* l'emporte sur ln.

Exemple 3 : déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \ln x\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \ln x\right) = +\infty \end{array}$$

(on a utilisé : $x^2 - \ln x = x^2 + \left(-\ln x\right)$)



★ Fonction exponentielle

- La fonction ln est strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$. Alors pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;+\infty[$, l'équation $\ln y = x$ admet une unique solution dans $]0\,,+\infty[$: e^x.
  La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction réciproque de ln.

- Quelques conséquences immédiates :
  - ✓ exp est définie sur $\mathbb{R}$.
  - ✓ $e^0 = 1$; $e^1 = e$.
  - ✓ Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$.
  - ✓ Pour tout réel $x > 0$ $e^{\ln x} = x$.

- $\boldsymbol{\left(e^x\right)' = e^x}$ $\boldsymbol{\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}}$ $\boldsymbol{\left(e^{ax}\right)' = a\,e^{ax}}$ $\boldsymbol{\left(e^u\right)' = u'\,e^u}$.

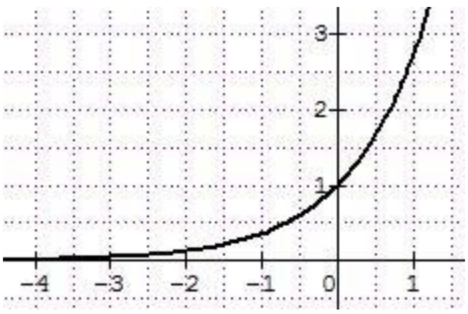
- **Formules**

  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\left(e^a\right)^n = e^{an}$

- **Variations et signe**
  exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $e^x > 0$.

- **Limites**
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$)

- **Croissances comparées**
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$: à l'infini, exp l'emporte sur toute puissance de x.



VI. Primitives des fonctions usuelles

★ **Primitive de *f* sur *I*** :

- ✓ Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. F est une primitive de f sur I, si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$
- ✓ Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
- ✓ Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I, alors :
  - les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \to F(x)+k,\ k \in \mathbb{R}$;
  - il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur y_0 en x_0.

★ **Primitives des fonctions usuelles** :

Fonction	Une primitive	Intervalle
$x \mapsto k$ $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $]-\infty\,;0\,[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n<-1$
$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

★ **Autres formules de primitive** :

Fonction	Une primitive
$u'\,u^n$ $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ u ne s'annule pas sur I lorsque $n<0$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ u strictement positive sur I	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$ u strictement positive sur I	$\ln u$
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u

VII. Intégrales

★ **Intégrale et primitive** :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b$.

Exemple 1 : calculer $I = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x - 1\right)\mathrm{d}x$.

$$I = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 1\right) - (0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3+4+6-12}{12} = \frac{1}{12}.$$

Exemple 2 : calculer $J = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

$$J = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2\times 2^2} - \frac{1}{2} + \ln 2\right) - \left(-\frac{1}{2\times 1^2} - \frac{1}{1} + \ln 1\right).$$

$$J = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8} + \ln 2.$$

★ **Propriétés de l'intégrale**

- **Relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Linéarité**

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_a^b (k\,f)(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Positivité**

Si f est positive sur $[a\,;b]$ avec $a \le b$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$.

On peut en déduire le signe d'une intégrale selon le signe de f et le sens de a et b.

- **Conservation de l'ordre**

Si $f \le g$ sur $[a\,;b]$ avec $a \le b$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice **:**

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ 6]$ par : $f(x)=\begin{cases} x \ \text{ si } 1\le x\le 2 \\ -x \text{ si } 2\le x\le 3 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Calculer $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 0\ \mathrm{d}x+\int_1^2 x\ \mathrm{d}x+\int_2^3 -x\ \mathrm{d}x+\int_3^6 0\ \mathrm{d}x\,,$$

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{x^2}{2}\right]_2^3+0\,,$$

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^2}{2}\right)+\left(-\frac{3^2}{2}\right)-\left(-\frac{2^2}{2}\right)=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+\frac{4}{2}=-\frac{2}{2}=-1\,.$$

★ Intégrale et aire

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et C sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

Le réel $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

★ Fonction définie par une intégrale

Soient g une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I.

La fonction f définie sur I par $f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de g sur I qui s'annule en a. Autrement dit, f est une fonction dérivable sur I et $f'(x)=g(x)$.

Exemple : $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$

VIII. Représentation graphique

★ **Conseils** :

Pour représenter graphiquement une fonction :

- on travaille proprement au crayon gris dans un repère (O, I, J) (trois points suffisent),
- on porte toutes les informations remarquables évoquées par l'énoncé (extremum, c'est-à-dire minimum ou maximum, tangente, asymptotes, …)
- on construit point par point avec abscisses x et ordonnées $f(x)$ (pour construire une droite, deux points suffisent) à l'aide, si besoin, des valeurs remarquables ci-dessous.

★ **Valeurs remarquables** :

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \qquad \ln(2) \approx 0,7 \qquad \mathrm{e} \approx 2,7 \qquad \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,4$$

Suites

I. Suites arithmétiques

★ (u_n) est une suite arithmétique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1}-u_n=a$ où a est une constante réelle.

★ Si (u_n) est une suite arithmétique de raison a, alors :

$$\boxed{\boldsymbol{u_n=u_0+n\times a}} \qquad \text{ou bien} \qquad \boxed{\boldsymbol{u_n=u_1+(n-1)\times a}}$$

★ Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on part de $u_{n+1}-u_n$.
Le résultat doit être une constante.

★ Une somme particulière :

$$\boxed{1+2+\ldots+n=\sum_{k=0}^{k=n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

II. Suites géométriques

★ (v_n) est une suite géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $v_{n+1}=b\times v_n$ où b est une constante réelle.

★ Si (v_n) est une suite géométrique, alors :

$$\boxed{\boldsymbol{v_n=v_0\times b^n}} \qquad \text{ou bien} \qquad \boxed{\boldsymbol{v_n=v_1\times b^{n-1}}}$$

★ Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de v_{n+1}.
Le résultat doit être $b\times v_n$.

★ Limite et suite géométrique :

$$\text{si } |q|<1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n=0 \qquad ; \qquad \text{si } q>1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$$

★ Une somme particulière :

$$\boxed{1+b+\ldots+b^n=\sum_{k=0}^{k=n}b^k=\frac{b^{n+1}-1}{b-1}}$$

III. Suites arithmético-géométriques

★ (u_n) est une suite arithmético-géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1}=au_n+b$ où a et b sont des constantes réelles.

★ Pour déterminer le terme d'une suite arithmético-géométrique :

- On détermine le réel l tel que $l=al+b$.
- On pose $v_n=u_n-l$. On montre que (v_n) est une suite géométrique.
- On détermine l'expression de v_n ($v_n=v_0\times q^n$ ou $v_n=v_1\times q^{n-1}$) puis on en déduit l'expression de u_n ($u_n=v_n+l$)

★ On peut également parfois en déduire la limite de u_n.

IV. Suites croissantes, majorées, minorées, bornées

★ Une suite (u_n) est croissante si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\le u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\ge u_{n+1}$.

★ Pour déterminer les variations d'une suite (u_n), on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$.
Si $u_{n+1}-u_n\ge 0$, (u_n) est croissante et si $u_{n+1}-u_n\le 0$, (u_n) est décroissante.

★ Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\le M$.
Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\ge m$.
Une suite (u_n) est bornée s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $m\le u_n\le M$.

V. Théorèmes de convergence

★ **Théorème de minoration :**
Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

★ Théorème de majoration :
Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

★ **Théorème d'encadrement (des gendarmes) :**
Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

★ **Suites monotones et convergences – théorème de convergence monotone :**
Toute suite croissante et majorée est convergente (on ne connait pas, à ce stade, la limite).
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Probabilités

I. Généralités

★ Formule du crible :

Pour tous événements *A* et *B* : $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

★ Événements contraires

Si A est un événement et $\bar{\mathrm{A}}$ son événement contraire, alors $p(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$.

★ Événements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing)$, alors :

$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 0$;

$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

★ Équiprobabilité

Si les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

II. Dénombrements

★ **Tirages successifs avec ou sans remise**

On utilise le **principe multiplicatif**.

Exemples :

Si on tire 4 boules successivement avec remise dans une urne en contenant 6, on a :

$6\times6\times6\times6 = 6^4 = 1296$ résultats possibles.

Si on tire 4 boules successivement sans remise dans une urne en contenant 6, on a :

$6\times5\times4\times3 = 360$ résultats possibles.

★ **Tirages simultanés & nombres « *k* parmi *n* »**

- Factorielle d'un entier naturel
  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
  Par convention, $0! = 1$ et $1! = 1$.

- Le nombre de tirages de k boules dans une urne parmi n est : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

  Ce nombre se calcule à l'aide de la formule ou à l'aide du triangle de Pascal.
  $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

- Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

III. Probabilités conditionnelles

★ **Probabilité conditionnelle :**

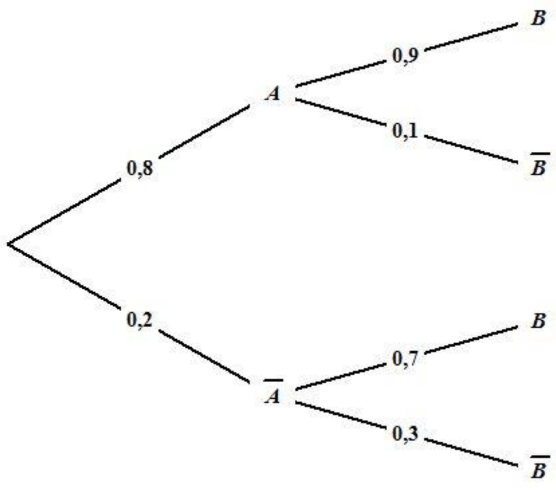
on appelle probabilité de B sachant A le réel $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

★ **Événements indépendants :**

- Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si P (A) ≠ 0 et P (B) ≠ 0, on a A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$.

★ **Arbre à calculs et formule des probabilités totales**

Exemple :



<u>Rédaction « type »</u>

- A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :
- $P(B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$
  $P(B)=0,8\times 0,9+0,2\times 0,7$
  $P(B)=0,72+0,14=0,86$

(on peut aussi noter $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$)

IV. Lois de probabilités discrètes

★ Généralités :
Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est présenter l'ensemble des valeurs x_i prises par X et calculer les probabilités $P[X=x_i]$ correspondantes.
Cette présentation se fait généralement à l'aide d'un tableau ou à l'aide d'une formule.

★ **Fonction de répartition :**

- La fonction de répartition d'une v.a. X est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $F(x)=p(X\leq x)$.
- On a donc : $p(X\leq a)=F(a)$, $p(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)$ et $p(X\geq a)=1-F(a)$

★ **Variable aléatoires discrètes finies**

- **Espérance :**

$$\boxed{E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i=\sum_i x_i\,p[X=x_i]}$$

- **Variance :**

$$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+\ldots+p_n(x_n-E(X))^2=\sum_{i=1}^{i=n}p_i(x_i-E(X))^2.$$

Formule de Koenig-Huygens : on démontre que $\boxed{V(X)=E(X^2)-(E(X))^2}$.

Ainsi, $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i^2-(E(X))^2$.

Remarque : $E(X^2)=V(X)+(E(X))^2$

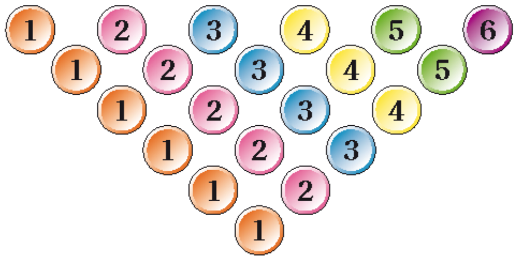
- **Écart type :**

Écart type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exercice corrigé :

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.

On pioche au hasard un jeton du sac.



Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton.

On définit la variable aléatoire X qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

1. Déterminer $X(\Omega)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer $E(X)$.

4. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

Correction :

1. Chaque jeton rapporte 1 à 6 euros et la mise est de 3 euros. Donc $X(\Omega) = [\![-2,3]\!]$.

2. Il y a 6 jetons numérotés 1 sur les 21. Donc $p(X=-2) = \frac{6}{21}$.

On procède de la même façon pour les autres valeurs pour obtenir la loi de probabilité :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

3. $E(X) = \frac{6}{21}\times(-2) + \frac{5}{21}\times(-1) + \frac{4}{21}\times 0 + \frac{3}{21}\times 1 + \frac{2}{21}\times 2 + \frac{1}{21}\times 3 = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}$.

4. $E(X^2) = \frac{6}{21}\times(-2)^2 + \frac{5}{21}\times(-1)^2 + \frac{4}{21}\times 0^2 + \frac{3}{21}\times 1^2 + \frac{2}{21}\times 2^2 + \frac{1}{21}\times 3^2$

$E(X^2) = \frac{6}{21}\times 4 + \frac{5}{21}\times 1 + \frac{4}{21}\times 0 + \frac{3}{21}\times 1 + \frac{2}{21}\times 4 + \frac{1}{21}\times 9 = \frac{49}{21} = \frac{7\times 7}{7\times 3} = \frac{7}{3}$

On en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{9} = \frac{21-1}{9} = \frac{20}{9}.$$

Finalement, $\sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

★ **Propriétés de l'espérance**

Par linéarité de l'espérance :

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

★ **Propriétés de la variance**

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$
$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

V. Lois de probabilités usuelles discrètes

★ Loi certaine :

Soient $a\in\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire certaine égale à a. On a :

$$X(\Omega)=\{a\} \qquad ; \qquad P[X=a]=1.$$
$$E(X)=a \qquad ; \qquad V(X)=0.$$

★ **Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, on a :

$$X(\Omega)=[\![1,n]\!] \qquad ; \qquad \forall k\in[\![1,n]\!],\ P[X=k]=\frac{1}{n}$$
$$E(X)=\frac{n+1}{2} \qquad ; \qquad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

On note $X\hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

★ **Loi de Bernoulli**

On considère la variable aléatoire X qui associe 1 à l'issue de l'épreuve et 0 sinon.
On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p.

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a :

$$X(\Omega)=\{0\,;1\} \quad ; \quad P[X=1]=p \text{ et } P[X=0]=1-p$$

$$E(X)=p \quad ; \quad V(X)=p(1-p)$$

★ Loi binomiale

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a :

$$X(\Omega)=[\![0,n]\!] \quad ; \quad \forall k\in[\![1,n]\!],\ P[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X)=n\,p \quad ; \quad V(X)=n\,p(1-p)$$

Exemple :

On lance dix fois un dé à six faces bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois que le 5 est obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de X.

<u>Rédaction « type »</u>

On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le 5 est obtenu, avec la probabilité 1/6 ;
- échec : le 5 n'est pas obtenu, avec la probabilité 5/6.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et 1/6.

Dès lors, dans cet exemple :

- $X(\Omega)=[\![0\,,10]\!]$
- Pour tout entier $k\in X(\Omega)$, $P(X=k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$
- $E(X)=n\times p=10\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$
- $V(X)=n\times p\times(1-p)=\frac{5}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{18}$

Scilab

I. Interaction avec l'utilisateur

★ La commande **`x=input('message')`** écrit le message à l'écran, attends la réponse de l'utilisateur et stocke cette réponse dans la variable x.

★ La commande **`disp('message')`** écrit le message (entre guillemets) à l'écran.
La commande **`disp(u)`** écrit à l'écran la valeur de la variable u.

II. Nombres et opérations élémentaires

★ Les nombres décimaux se notent avec <u>un point</u> et non une virgule.

★ Le signe = est réservé à l'affectation d'une variable (par exemple : `x=3`).

★ Constantes prédéfinies : `%pi` pour π et **`%e`** pour e.

★ Fonctions usuelles :
- La commande **`log(x)`** calcule ln(x).
- La commande **`exp(x)`** calcule e^x.
- La commande **`floor(x)`** calcule la partie entière de *x*, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à *x*.
- La commande `abs(x)` calcule $|x|$, la valeur absolue de *x*.
- La commande `sqrt(x)` calcule $\sqrt{x}$.
- La commande `ceil(x)` renvoie le plus petit nombre entier supérieur ou égal à *x*.

★ Opérations arithmétiques : ne pas oublier les parenthèses le cas échéant.
- Addition : `+`, soustraction : `-`, multiplication : `*`, division : `/` et puissance : `^`.

★ Opérateurs de comparaisons pour les tests :
- Test d'égalité : == (à ne pas confondre avec l'affection d'une variable).
- Test de différence : <>.
- Tests de comparaison : <, <=, >, >=.
- Commandes `and` et `or` pour les tests logiques.

III. Matrices

★ Création de vecteurs et matrices

- Vecteur ligne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des espaces ou des virgules.

```
--> [-2 1 1.5]
 ans  =

  -2.    1.    1.5
```

```
--> [2,1,1.5]
 ans  =

   2.    1.    1.5
```

- Vecteur colonne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des points virgules.

```
--> [-2;1;1.5]
 ans  =

  -2.
   1.
   1.5
```

- Matrice : les éléments sont écrits entre crochets ; les éléments d'une ligne sont séparés par des virgules ; les lignes sont séparées par des points virgules.

```
--> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
 A  =

   1.    2.    3.
   4.    5.    6.
   7.    8.    9.
```

★ Création automatique de vecteurs lignes (utile pour les graphiques)

- La commande **`a:b`** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de *a* à *b* espacées de 1.

```
--> 1:6
 ans  =

   1.    2.    3.    4.    5.    6.
```

- La commande **`a:p:b`** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de *a* à *b* espacées de *p*.

```
--> 0:0.2:1
 ans  =

   0.    0.2    0.4    0.6    0.8    1.
```

```
--> 1:3:14
 ans  =

   1.    4.    7.    10.    13.
```

- La commande **`linspace(a,b,n)`** renvoie un vecteur ligne contenant n valeurs équiréparties entre a et b.

```
--> linspace(0,10,6)
 ans  =

   0.    2.    4.    6.    8.    10.
```

★ **Matrices prédéfinies**

- La commande **`zeros(n,p)`** renvoie une matrice de taille $n\times p$ (n lignes et p colonnes) remplie de 0.

```
--> zeros(3,5)
 ans  =

   0.    0.    0.    0.    0.
   0.    0.    0.    0.    0.
   0.    0.    0.    0.    0.
```

```
--> zeros(1,6)
 ans  =

   0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

- La commande **`ones(n,p)`** renvoie une matrice de taille $n\times p$ remplie de 1.

```
--> ones(4,3)
 ans  =

   1.    1.    1.
   1.    1.    1.
   1.    1.    1.
   1.    1.    1.
```

★ **Opérations sur les matrices**

- La commande **`u(k)`** renvoie le k-ième élément d'un vecteur u.

```
--> u=1:2:15
 u  =

   1.   3.   5.   7.   9.   11.   13.   15.


--> u(4)
 ans  =

   7.
```

- Si *u* est un vecteur déjà défini, la commande **`u(k)=...`** <u>modifie ou rajoute</u> un élément à la *k*-ième position. Cela permet de construire un vecteur pas à pas (très utile pour les suites).

```
--> u=[1,2,3];

--> u(4)=8.5
 u  =

   1.    2.    3.    8.5


--> u(7)=-2
 u  =

   1.    2.    3.    8.5    0.    0.   -2.
```

IV. Structures fondamentales

★ Boucle `for`

- Structure classique :

```
..①..
for ..②.. (do)
      ..③..
end
```

- Il s'agit d'une boucle dont **on contrôle le nombre de répétitions** grâce à la condition ②.

- ① représente en général les conditions initiales.

- ② s'exprime sous la forme `k=a:b`. C'est-à-dire qu'une variable *k* est créée puis qu'elle va prendre une à une toutes les valeurs de *a* jusqu'à *b*. Par exemple, la condition `k=1:n` signifie qu'il y aura *n* répétitions de l'instruction ③.

- L'instruction ③ sera répétée autant de fois que la condition ② le prévoit.

- ***Exemples :***

Script 1
```
u=1
for k=1:4
   u=u+2
end
disp(u)
```

Script 2
```
u=zeros(1,5)
u(1)=1
for k=1:4
   u(k+1)=u(k)+2
end
disp(u)
```

Script 3
```
u=ones(1,5)
for k=2:5
   u(k)=u(k-1)+2
end
disp(u)
```

Explication 1
Au début, u vaut 1

4 répétitions « +2 » sont programmées

Explication 2
Au début, u vaut 0,0,0,0,0
Puis u vaut 1,0,0,0,0
4 répétitions sont programmées
on calcule $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ et $u(5)$

Explication 3
Au début, u vaut 1,1,1,1,1

4 rép. sont programmées
on calcule $u(2)$, … , $u(5)$

Affichage 1
```
9
```

Affichage 2
```
1.  3.  5.  7.  9.
```

Affichage 3
```
1.  3.  5.  7.  9.
```

★ Boucle `while`

- Structure classique :

```
..①..
while ..②.. do
      ..③..
end
```

- Il s'agit d'une boucle dont **on ne contrôle pas le nombre de répétitions**. La boucle continue tant que la condition ② est valable.

- Cette structure est adaptée lorsque l'on recherche un <u>seuil</u> à atteindre ou à dépasser.

- Il est souvent intéressant de créer un compteur de boucles pour savoir combien de boucles ont été effectuées.

- ***Exemples :***

Script 1

```
u=1
while u<=10000
   u=u*2
end
disp(u)
```

Script 2

```
u=1
n=0
while u<=10000
   u=u*2
   n=n+1
end
disp(n)
```

Affichage 1

```
16384
```

Affichage 2

```
14
```

Explication 1 :
Ce script décrit les termes d'une suite géométrique de raison 2. Au début *u* vaut 1.
Tant que *u* est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2.
En multipliant par 2, *u* augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000.
À ce moment-là, *u* vaut 16384.

Explication 2 :
Au début *u* vaut 1 et *n* vaut 0.
Tant que *u* est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2, mais, dans le même temps, *n* est augmenté de 1. *n* est donc un **compteur de boucles**.
En multipliant par 2, *u* augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000.
À ce moment-là, il y a eu 14 boucles d'effectuées.

★ **Structures conditionnelles**

if :

```
if .... then
    ....
end
```

if / else :

```
if .... then
    ....
else
    ....
end
```

If / elseif / else :

```
if .... then
    ....
elseif ... then
    ....
else
    ....
end
```