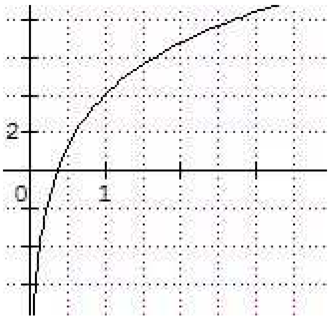
Premiers exercices sur les limites

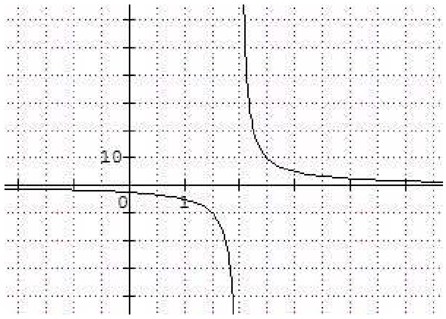
⋆ Exercice 7.1

À l'aide d'une lecture graphique, conjecturer, les limites demandées.

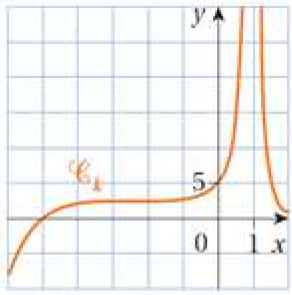
a. limite en 0^+



b. limites en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+

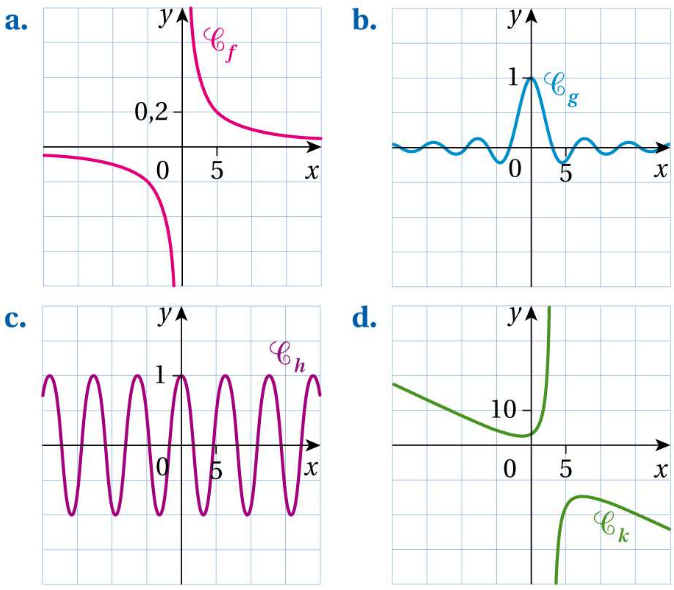


c. limites en $-\infty$, 1^- et 1^+



⋆ Exercice 7.2

À l'aide d'une lecture graphique, conjecturer, si elles existent, les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.



★ Exercice 7.3

Déterminer les limites suivantes :

1. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^3$.

3. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{6}{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-7x}$.

4. **a)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{4}{3x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{5x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{8}{-x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-9}{-2x}$.

★ Exercice 7.4

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes :

1. $f(x)=2x^2-x+1$ **2.** $f(x)=x^2-4x+1$ **3.** $f(x)=-2x^2+4x-2$

4. $f(x)=-2(x-1)^2$ **5.** $f(x)=4x^3-6x^2+2$ **6.** $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$

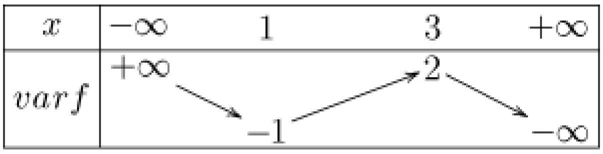
7. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$

Continuité et dérivation
Exercices

Équations f (x) = k

★ Exercice 7.5

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variation est :



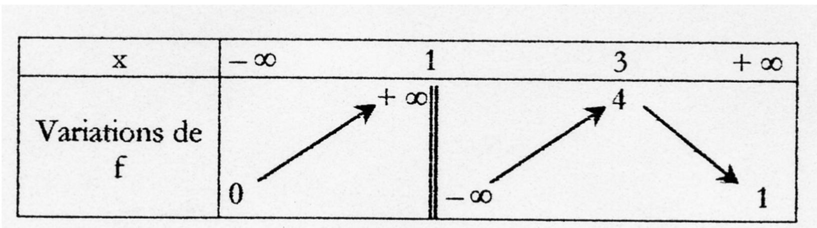
1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $[1\ ;\ 3]$.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $[3\ ;+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

★ Exercice 7.6

Soit *f* une fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, dont le tableau de variation est :



Pour chaque question, une justification rigoureuse est attendue.

1. Combien l'équation $f(x)=2$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$?

2. Combien l'équation $f(x)=5$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$?

3. Combien l'équation $f(x)=-1$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$?

Dérivées

★ Exercice 7.7

Déterminer les dérivées des fonctions polynômes suivantes :

1. $f(x)=2x^2-x+1$ **2.** $f(x)=x^2-4x+1$ **3.** $f(x)=-2x^2+4x-2$

4. $f(x)=-2(x-1)^2$ **5.** $f(x)=4x^3-6x^2+2$ **6.** $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$

7. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$

Étude de fonctions

★ Exercice 7.8

Pour chacune des fonctions de l'exercice **7.7** :

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée.
3. Étudier le signe de la dérivée.
4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction.

★ Exercice 7.9

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x^2-4$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

★ Exercice 7.10

Un artisan a un bénéfice net, en euros, qui dépend du nombre x de pièces vendues.
Ce bénéfice est donné par :

$$\text{pour } x\in[0\,;+\infty[,\ b(x)=-\frac{x^3}{3}+50x^2-99x-130.$$

1. Soit b' la fonction dérivée de b. Calculer $b'(x)$.
2. Déterminer le signe de $b'(x)$ et en déduire les variations de la fonction b sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Quel est le nombre de pièces que l'artisan doit fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum ? Calculer ce bénéfice maximum.