Activité : Notion de limite et de continuité

Voici un extrait de la grille des tarifs pratiqués par un site internet spécialisé dans les tirages de photos numériques :

Format 10X13 cm (Papier HD)	Prix unitaire	
La photo de 1 à 49	**0,18 €**	
La photo de 50 à 99	0,17 €	~~0,18€~~
La photo de 100 à 249	0,16 €	~~0,18€~~
La photo de 250 à 499	0,15 €	~~0,18€~~
La photo de 500 à 999	0,13 €	~~0,18€~~
La photo de 1000 et plus	0,12 €	~~0,18€~~

Format 11X15 cm (Papier HD)	Prix unitaire	
La photo de 1 à 49	**0,22 €**	
La photo de 50 à 99	0,21 €	~~0,22 €~~
La photo de 100 à 249	0,20 €	~~0,22 €~~
La photo de 250 à 499	0,19 €	~~0,22 €~~
La photo de 500 à 999	0,17 €	~~0,22 €~~
La photo de 1000 et plus	0,15 €	~~0,22 €~~

Format 13x17 cm (Papier HD)	Prix unitaire	
La photo de 1 à 49	**0,30 €**	
La photo de 50 à 99	0,29 €	~~0,30 €~~
La photo de 100 à 249	0,27 €	~~0,30 €~~
La photo de 250 à 499	0,26 €	~~0,30 €~~
La photo de 500 et plus	0,26 €	~~0,30 €~~

On s'intéresse à une commande d'un tirage d'environ 1 000 photos au format 11x15.

Quel est *environ* le prix de la commande si le nombre de tirages souhaité est très légèrement inférieur à 1 000 ?

Quel est *environ* le prix de la commande si le nombre de tirages souhaité est très légèrement supérieur à 1 000 ?

Bilan :

1. Déterminer la limite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en un point *a*, c'est déterminer une valeur vers laquelle on se rapproche lorsque l'on considère des valeurs "extrêmement" proches du point *a*. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Dans cette activité, on a : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 170$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 150$.

Cette notion se prolonge (et trouve tout son sens) :

- à l'étude de ce qu'il se passe lorsque l'on considère des très grandes valeurs positives (on note alors $+\infty$) ou de très grandes valeurs négatives (on note $-\infty$)
- à l'étude de ce qu'il se passe lorsque l'on se rapproche de valeurs interdites

2. Il existe des fonctions qui, en un nombre *a* donné, ne se rapprochent pas vers la même valeur selon si l'on approche de *a* par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures.
On parle de discontinuité.
Une fonction définie sur un intervalle qui ne possède aucun point de discontinuité sur cet intervalle est dite **continue**.

Alphabet : C comme Continuité *extrait*

de Corrado Mascia

Le monde dans lequel nous vivons

Beaucoup d'idées en mathématiques semblent abstraites, mais elles découlent de la perception concrète que nous avons de la réalité. Par exemple, la notion de continuité découle du fait que le monde qui nous entoure, en général, change de manière relativement progressive.

Pour mieux comprendre ce concept, essayez d'imaginer qu'au contraire, le monde ne soit pas du tout continu. Je me lève le matin, je vais à la salle de bain et je fais couler de l'eau pour me laver. Tout va bien au début : l'eau coule du robinet à la température que j'aime le plus et qui me permet de passer de l'état de torpeur à celui de réveil sans traumatisme particulier. Mais, tout à coup, sans que rien ne prévienne, la température de l'eau devient froide. J'ai à peine le temps de me remettre du choc qu'elle devient bouillante. J'éloigne les mains d'un seul coup, mais le jet (qui avant descendait régulièrement vers le bas), sans aucun avertissement, commence à changer de direction : vers le haut, vers le miroir, vers moi, puis vers le bas et ainsi de suite, sans aucune raison apparente. Après, c'est au tour du carrelage : jusqu'à hier il s'usait au fur et à mesure et soudain il casse. La serviette de la salle de bains disparaît et réapparaît dans le salon. À sa place apparaît une nappe. Et ainsi de suite. Tout semble comme fracturé, comme dans un cadre futuriste, dans lequel l'image serait morcelée. Il s'agit clairement d'une mauvaise journée...

Qu'est-ce donc, la continuité ? C'est le contraire de ce que j'ai décrit. C'est un monde dans lequel deux photos, prises à des instants infiniment proches, sont infiniment ressemblantes. Les transitions et les transformations peuvent se produire, mais pas de manière drastique et immédiate. Les changements peuvent se produire, mais toujours à travers une séquence d'états intermédiaires de l'état de départ à celui d'arrivée. De toute évidence, le concept doit être précisé et c'est à ce stade que l'utilisation du langage mathématique montre toute sa puissance et sa flexibilité…

Activité : Limites de fonctions usuelles

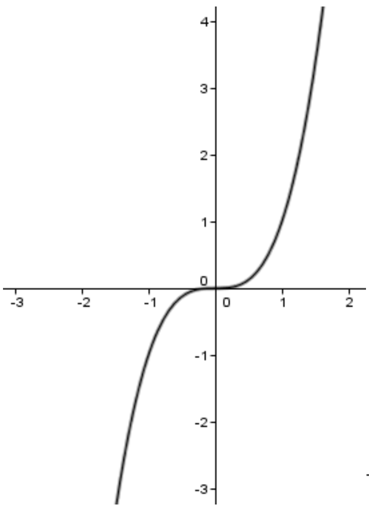
Voici 8 représentations graphiques. Reconnaître celles qui correspondent aux fonctions suivantes :

La courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ est la courbe n° ……

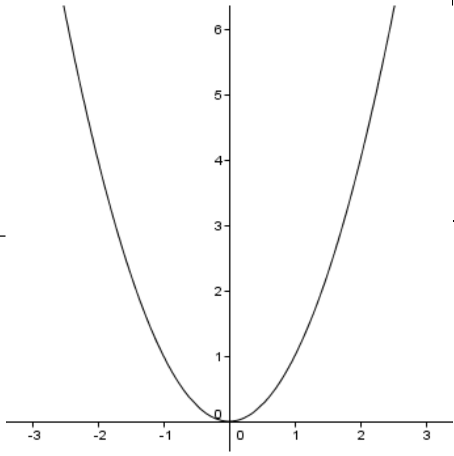
La courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ est la courbe n° ……

La courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est la courbe n° ……

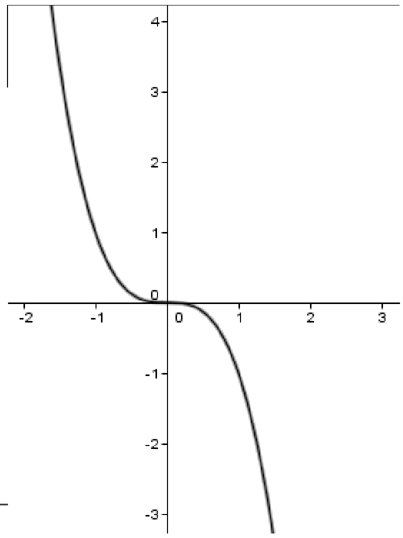
La courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est la courbe n° ……



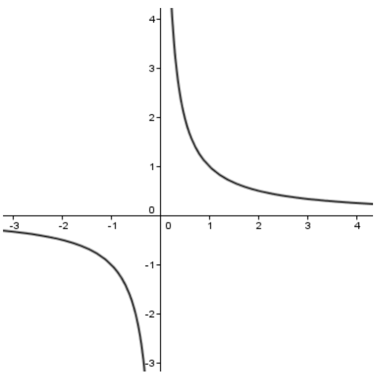
n° 1



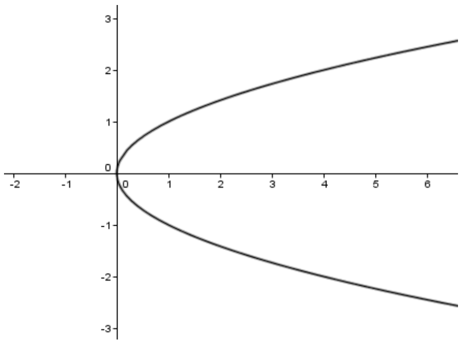
n° 2



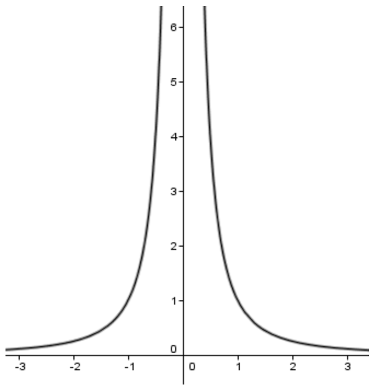
n° 3



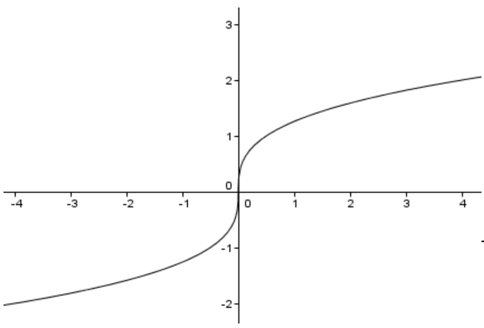
n° 4



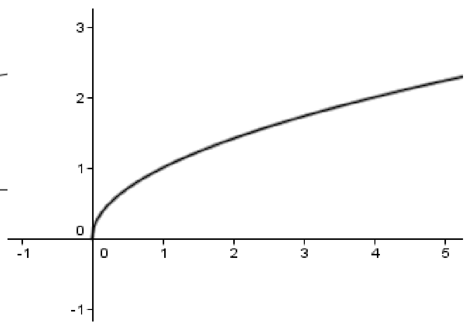
n° 5



n° 6



n° 7



n° 8

En utilisant les graphiques précédents, indiquer les limites des fonctions usuelles citées.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$$

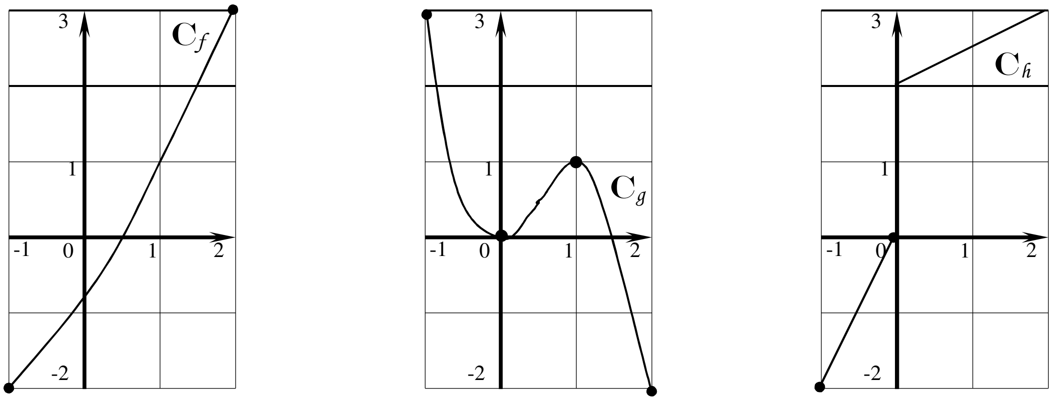
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$$

Activité : Équation $f(x) = k$

1. Résolution graphique

Voici les représentations graphiques de 3 fonctions *f*, *g* et *h* définies sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



k est un réel de l'intervalle $[-2 ; 3]$.

Indiquer par lecture graphique, suivant les valeurs de *k*, le nombre de solutions de chacune des équations :

a) $f(x) = k$

b) $g(x) = k$

c) $h(x) = k$

2. Tracé de courbes

f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [-1 ; 2]$ telle que : $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$.

Tracer une courbe représentative d'une fonction *f* telle que :

a) L'équation $f(x) = 2$ ait trois solutions dans *I*.

b) L'équation $f(x) = 2$ n'ait pas de solutions dans *I*.

c) Pour tout réel *k* compris entre 1 et 4 l'équation $f(x) = k$ ait une solution unique dans *I*.

3. Généralisation

f est une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$. Imposer des conditions à la fonction *f* telles que pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

a) L'équation $f(x) = k$ ait au moins une solution dans *I*.

b) L'équation $f(x) = k$ ait une seule solution dans *I*.

Activité : Le skieur

Cette activité a pour objectif d'apporter des éléments de réponse à la question :

Q_1 : Comment déterminer les variations d'une fonction ?

On considère la fonction f (vidéo projetée) définie sur l'intervalle $[-5\ ;10]$ (fichier 1).

I. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5\ ;10]$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

II. Intuitivement, comment peut-on décrire la tangente à une courbe en un point M ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III. Quel est le signe du coefficient directeur de la tangente sur l'intervalle $[-5\ ;10]$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

On appelle « **dérivée** » la fonction notée f' qui associe à chaque abscisse le coefficient directeur de la tangente.

IV. a) Lorsque la dérivée est positive, comment varie la fonction ? (fichier 2)

……………………………………………………………………………………………

b) Lorsque la dérivée est négative, comment varie la fonction ?

……………………………………………………………………………………………

c) Lorsque la dérivée est nulle, où se situe le point M ?

……………………………………………………………………………………………

Bilan intermédiaire :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Une façon de répondre à la question Q_1 consiste donc à répondre tout d'abord à la question :

Q_2 : **Comment déterminer les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?**

V. Dans cette question, on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.

a) À l'aide du logiciel (fichier 3), compléter le tableau suivant :

Abscisse x du point M	$-1{,}9$	-1	0	1	$7{,}2$
Coefficient directeur de la tangente					

b) Conjecturer l'expression de f' en fonction de x.

……………………………………………………………………………………………

c) On considère le point M de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ et le point N de coordonnées $(a+h\ ;\ f(a+h))$ (fichier 4).

Comment se "comporte" la sécante (MN) lorsque le point N se rapproche du point M, c'est-à-dire lorsque h se rapproche de 0.

……………………………………………………………………………………………

Exprimer le coefficient directeur de la droite (MN) en fonction de h.

……………………………………………………………………………………………

Quelle est la limite de ce coefficient directeur lorsque h se rapproche de 0 ?

……………………………………………………………………………………………

Nouveau bilan :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………