Continuité

I. Limite en *a*

f est définie sur un intervalle *I* et *a* est un réel de *I*.

Dire que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ signifie que les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de *l* qu'on veut du moment que *x* est suffisamment proche de *a*.

II. Approche intuitive

Dire que *f* est continue signifie que l'on peut tracer la courbe de *f* sans lever le crayon.

Exemple : fonction donnant l'impôt en fonction des revenus.

Plus rigoureusement, pour tout *x* de l'ensemble de définition de *f*, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Les fonctions usuelles sont des fonctions continues.

III. Application importante

Soient *f* une fonction définie et **continue** sur un intervalle *I* et *a* et *b* deux réels de *I*.
Pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède (au moins) une solution dans l'intervalle $[a\ ;b]$.

Conséquence :
Si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;b]$ $(a<b)$, alors, pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une solution **unique** dans l'intervalle $[a\ ;b]$.

Dérivation

I. Dérivabilité

f est dérivable en a si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. La limite de ce quotient est noté $f'(a)$ et appelée le nombre dérivé de *f* en a :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de *f* en *A*.

On admet que toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

L'ensemble $D_{f'}$ des réels a de D_f tels que *f* est dérivable en a est appelé l'ensemble de dérivabilité de *f*.

La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ d'ensemble de définition $D_{f'}$ est la fonction dérivée de *f*.

II. Dérivées des fonctions polynômes

Dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to 1$; $x \to x$; $x \to x^2$; $x \to x^3$; $x \to x^n$.

Dérivées de $x \to x+1$; $x \to x^2+x+1$; $x \to x^3+x^2+7x+5$; $x \to 2x^3+3x^2$; $x \to 2x^3-x^2+7$.

III. Application importante : dérivée et variation

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur *I*.

Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, alors *f* est décroissante sur *I*.

Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors *f* est constante sur *I*.

Dès lors, pour étudier les variations d'une fonction, on peut :

1. Calculer sa dérivée
2. Étudier le signe de la dérivée
3. En déduire les variations de la fonction

Exemples :

1. Étude des variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

2. Étude des variations de la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$.

➢ Extension de la limite en $+\infty$ et en $-\infty$

★ **Exercice :**

1. Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 + 2x$.

2. Démontrer que l'équation $x^5 + 2x = 1$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$