Suites géométriques – Suites arithmético-géométriques

I. Puissances entières d'un réel

1. Définition, notation

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel et a un réel, on note : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$.

2. Propriétés

m et n sont des entiers, a et b sont des réels avec b non nuls :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{n \times m}$$

II. Suites géométriques

1. Définition

Une suite géométrique est une suite obtenue en multipliant le terme précédent toujours par le même nombre, appelé raison. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note : $u_{n+1} = bu_n$.

Remarques :
- La relation $u_{n+1} = bu_n$ est appelée relation de récurrence.
- Une suite géométrique (u_n) est donc définie par son premier terme et sa raison.

Exemples :
- 1 ; 3 ; 9 ; 27 est une suite géométrique de quatre termes, de premier terme 1 et de raison 3.
- 4 ; -2 ; 1 ; -½ ; ¼ est une suite géométrique de cinq termes, de premier terme 4 et de raison – ½.

★ **Exercice :**
On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $b = 1,5$.

1. Calculer ses 4 premiers termes.
2. Placer les points dans un repère orthonormé.

★ **Exercice :**
On considère la suite géométrique de premier terme $v_1 = 8$ et de raison $b = ½$.

1. Calculer ses 5 premiers termes.
2. Placer les points dans un repère orthonormé.

Lorsque $b > 0$, tous les points $A_n(n \,;\, u_n)$ sont situés sur courbe dite exponentielle.

2. Calcul du terme de rang *n*

Par définition, $u_1 = bu_0$ et $u_2 = bu_1$. D'où $u_2 = b^2 u_0$. De même pour u_3.

Le terme de rang *n* d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison *b* est :
$u_n = u_0 \times b^n$. Si le premier terme est u_1 on a : $u_n = u_1 \times b^{n-1}$.

Remarque :
Si on cherche u_n en connaissant u_p, on a : $u_n = u_p \times b^{n-p}$.

★ **Exercice :**

1. Calculer le 10[e] terme de la suite géométrique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison 3.
2. Calculer le 11[e] terme de la suite géométrique telle que $u_0 = 5$ et de raison –2.

3. Sens de variation

La suite (u_n) est géométrique, de raison $b > 0$ et $u_0 > 0$.
Dans le cas où $b > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante. Pour tout *n*, $u_n < u_{n+1}$.
Dans le cas où $0 < b < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante. Pour tout *n*, $u_n > u_{n+1}$.
Dans le cas où $b = 1$, pour tout *n*, $u_n = u_{n+1}$: la suite (u_n) est constante.
Dans le cas où $b < 0$, la suite (u_n) est dite alternée. Elle n'est ni croissante, ni décroissante.

4. Reconnaître une suite géométrique

- Soit (u_n) une suite donnée. Si, pour tout *n*, le coefficient multiplicateur de u_n à u_{n+1} est un nombre *b* constant, alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison *b*.
- Soit (u_n) une suite donnée. Si, pour tout *n*, u_n est de la forme $a \cdot b^n$, alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison *b*.

5. Somme de termes

$$1+b+b^2+...+b^n=\frac{b^{n+1}-1}{b-1}$$

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S=(\text{premier terme de } S)\times\frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1-(\text{raison})}$$

III. Suites arithmético-géométriques

1. Définition

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par un premier terme et, pour tout n de $\mathbb{N}$, une relation du type : $u_{n+1}=a\,u_n+b$.

2. Point fixe

Une suite arithmético-géométrique admet un point fixe qui vérifie $a\,x+b=x \Leftrightarrow x=\frac{b}{1-a}$.

3. Calcul du terme de rang *n*

Le terme de rang n d'une suite arithmético-géométrique (u_n) de premier terme u_0 est :

$$u_n=(u_0-x)\times a^n+x\,.$$

Si le premier terme est u_1 on a : $u_n=(u_1-x)\times a^{n-1}+x$.