Suites géométriques
Exercices

Puissances

★ Exercices 8.1

Fichiers d'exercices :
Exercices conseillés : du n° 23 au 52, 58, 62, 64, 81 & 92.
Exercices qui seront corrigés : 23, 24, 25, 27, 40, 43, 44, 45, 46, 49, 50 & 58

Correction :

23. **a)** 3^4 **b)** x **c)** $2{,}3^6$ **d)** x **e)** 7^8

24. **a)** 3^3 **b)** 3^4 **c)** 5^3 **d)** 9^2

25. **a)** 8 et 6 **b)** 25 et 10 **c)** 27 et 9
d) 16 et 8 **e)** 1 et 5 **f)** 0 et 0

27. **a)** $\frac{4}{25}$ **b)** $\frac{27}{8}$ **c)** $\frac{125}{64}$

40. **a)** $\frac{1}{5^4}$ **b)** $\frac{1}{2^8}$ **c)** $\frac{1}{3^5}$ **d)** $\frac{1}{6^3}$

43. **a)** 6^5 **b)** 7^6 **c)** 4^{11} **d)** 5^4 **e)** 6^6 **f)** 9^7

44. **a)** 3^4 **b)** 2^6 **c)** 5^2 **d)** 6^8

45. **a)** 8^5 **b)** 10^6 **c)** 9^{13} **d)** 12^8

46. **a)** 5^3 **b)** 6^5 **c)** 4^1 **d)** 3^3 **e)** 5^2 **f)** 9^1

49. **a)** 10^3 **b)** 20^5 **c)** 21^2 **d)** 100^4 **e)** 4^3 ou 2^6 **f)** 36^6

50. **a)** 3^6 **b)** 4^2 **c)** 15^2 **d)** 4^5 **e)** 10^5 **f)** 5^3

58. **a)** 10^5 **b)** 10^{10} **c)** 10^{-2}

★ Exercice 8.2

À combien de sabords équivalent « mille milliards de mille sabords » ?

Correction :

$\underbrace{10^3}_{\text{mille}} \times \underbrace{10^9}_{\text{milliard}} \times \underbrace{10^3}_{\text{mille}} = 10^{15}$ sabords.

Suites géométriques

★ **Exercice 8.3**

1. On considère la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de terme initial $u_0 = 2$.
Déterminer u_n puis calculer u_4.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de terme initial $v_1 = 64$. Calculer v_n.

3. On considère la suite géométrique (w_n) de raison –2 et de terme initial $w_0 = -2$.
Déterminer w_n puis calculer w_5.

4. La suite (a_n) est définie par $a_0 = 4$ et $a_{n+1} = \frac{1}{8} a_n$.
Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Calculer a_n.

5. La suite (b_n) est définie par : $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2} b_n \end{cases}$. Déterminer l'écriture explicite de b_n.

Correction :

1. $u_n = u_0 \times b^n = 2 \times 3^n$. On en déduit : $u_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$.

2. $v_n = v_1 \times b^{n-1} = 64 \times 0{,}5^{n-1}$.

3. $w_n = w_0 \times b^n = -2 \times (-2)^n = (-2)^{n+1}$. On en déduit : $w_5 = (-2)^6 = 64$.

4. (a_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{8}$ et de premier terme $a_0 = 4$.

$a_n = a_0 \times b^n = 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$.

Notons que cette écriture peut se simplifier : $a_n = \frac{2^2}{\left(2^3\right)^n} = \frac{2^2}{2^{3n}} = 2^{2-3n}$.

5. (b_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $b_1 = 2$.

$b_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Notons que cette écriture peut se simplifier : $b_n = -\frac{(-2)}{(-2)^{n-1}} = -(-2)^{2-n}$.

★ Exercice 8.4

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right) \end{cases}$$

On appelle w la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$ et t la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.

2. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

Correction :

1. $$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right) - \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)u_n + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad w_{n+1} = \left(\frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right)u_n + \left(\frac{9}{12} - \frac{8}{12}\right)v_n = \frac{1}{12}v_n - \frac{1}{12}u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad w_{n+1} = \frac{1}{12}\left(v_n - u_n\right) = \frac{1}{12}w_n$$

$\left(w_n\right)$ est donc la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme :

$w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$.

On a donc : $w_n = w_0 \times b^n = 11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ et $\left(w_n\right)$ est bien à termes positifs.

2. Pour montrer qu'une suite $\left(t_n\right)$ est constante, on calcule t_{n+1} et on montre que $t_{n+1} = t_n$.

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3 \times \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) + 8 \times \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad t_{n+1} = \left(u_n + 2v_n\right) + 2\left(u_n + 3v_n\right) = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad t_{n+1} = 3u_n + 8v_n = t_n$$

$\left(t_n\right)$ est bien une suite constante.

On en déduit : $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 \times 1 + 8 \times 12 = 3 + 96 = 99$.

★ Exercice 8.5

1. La suite (u_n) est géométrique, de raison 0,5 et telle que $u_6 = 0{,}1875$. Calculer u_1.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de raison négative, de terme initial $v_1 = 2$ et telle que $v_5 = 162$. Calculer sa raison.

3. Pourquoi la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$ est-elle géométrique ?

Correction :

1. $u_1 = u_6 \times b^{-5} = 0{,}1875 \times 0{,}5^{-5} = 0{,}1875 \times 2^5 = 6$.

2. $v_5 = v_1 \times b^4 \Leftrightarrow b^4 = \dfrac{v_5}{v_1} = \dfrac{162}{2} = 81 = 3^4$ ou $(-3)^4$. Donc $b = -3$.

3. On a : $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}} = \left(\dfrac{2^2}{3^3}\right)^n = \left(\dfrac{4}{27}\right)^n = u_0 \times b^n$. La suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{27}$.

Somme de termes

★ Exercice 8.6

Calculer les sommes suivantes :

1. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{12}$

2. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^n$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Parcours vert : $3 + 9 + \ldots + 3^{10}$

Correction :

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$$

1. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{12} = \dfrac{2^{13} - 1}{2 - 1} = 2^{13} - 1 = 8\ 191$.

2. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{64}\right)\times 2=2-\frac{1}{32}=\frac{64-1}{32}=\frac{63}{32}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\times 2=2-\frac{1}{2^n}.$$

4. $3+9+\ldots+3^{10}=3\left(1+3+\ldots+3^9\right)=3\times\frac{3^{10}-1}{3-1}=\frac{3}{2}\times\left(3^{10}-1\right)$.

★ Exercice 8.7

1. (u_n) est la suite géométrique de raison 2 et de terme initial $u_0=3$. Calculer la somme de ses 10 premiers termes.

2. (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $u_1=2$. Calculer la somme de ses n premiers termes.

Correction :

$$S=(\text{premier terme de } S)\times\frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1-(\text{raison})}$$

1. $S=3\times\frac{1-2^{10}}{1-2}=3\left(2^{10}-1\right)=3\times 1023=3069$.

2. $S=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Suites arithmético-géométriques

★ Exercice 8.8

Dans chacun des cas suivants, trouver l'expression de u_n.

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

3. $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 4u_n - 6$.

4. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,2$.

Correction :

Pour déterminer la formule explicite d'une suite (u_n) arithmético-géométrique :

① On détermine son point fixe, soit par résolution de l'équation $a\,x + b = x$, soit par la formule $x = \dfrac{b}{1-a}$.

② On en déduit : $u_n = (u_0 - x)\times a^n + x$ ou $u_n = (u_1 - x)\times a^{n-1} + x$.

1. ① $a = 2$ et $b = 1$, donc $x = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1}{1-2} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

② On a alors : $u_n = (u_0 - x)\times a^n + x = (0-(-1))\times 2^n + (-1) = 2^n - 1$.

2. ① $a = 3$ et $b = 2$, donc $x = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2}{1-3} = \dfrac{2}{-2} = -1$.

② On a alors : $u_n = (u_0 - x)\times a^n + x = (0-(-1))\times 3^n + (-1) = 3^n - 1$.

3. ① $a = 4$ et $b = -6$, donc $x = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-6}{1-4} = \dfrac{-6}{-3} = 2$.

② On a alors : $u_n = (u_1 - x)\times a^{n-1} + x = (3-2)\times 4^{n-1} + 2 = 4^{n-1} + 2$.

4. ① $a = 0,2$ et $b = 0,2$, donc $x = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{0,2}{1-0,2} = \dfrac{0,2}{0,8} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

② On a alors : $u_n = (u_1 - x)\times a^{n-1} + x = (1-0,25)\times 0,2^{n-1} + 0,25 = 0,75\times 0,2^{n-1} + 0,25$.

★ Exercice 8.9

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel *n* non nul, on considère l'événement :

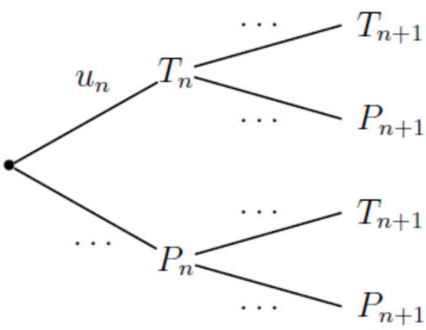
– T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son *n*-ième passage. »
– P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son *n*-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = p(T_n)$ où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1. a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$ et $p_{P_1}(T_2)$.

b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

2. a) Recopier et compléter l'arbre suivant :



b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

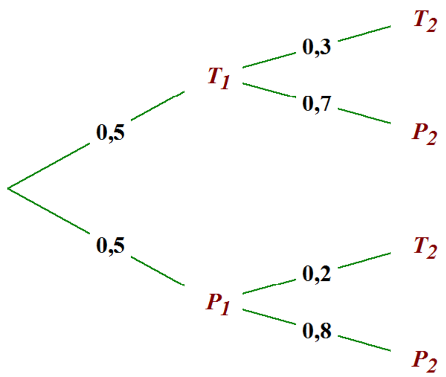
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

Correction :

1. a) D'après les données de l'énoncé :

$$p(T_1)=0,5 \qquad p(P_1)=0,5 \qquad p_{T_1}(T_2)=0,3 \qquad p_{P_1}(T_2)=0,8.$$

Les données peuvent être représentées grâce à l'arbre suivant :

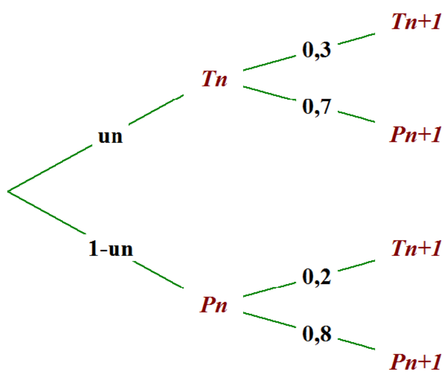


b) T_1 et P_1 constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(T_2)=p(T_1)\times p_{T_1}(T_2)+p(P_1)\times p_{P_1}(T_2) \ ;$$

$$\Leftrightarrow \qquad p(T_2)=0,5\times 0,3+0,5\times 0,2=0,15+0,10=0,25=\frac{1}{4}.$$

2. a)



b) T_n et P_n constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$u_{n+1}=p(T_{n+1})=p(T_n)\times p_{T_n}(T_{n+1})+p(P_n)\times p_{P_n}(T_{n+1}) \ ;$$

$$\Leftrightarrow \qquad u_{n+1}=u_n\times 0,3+(1-u_n)\times 0,2=0,3u_n+0,2-0,2u_n=0,1u_n+0,2.$$

3. (u_n) est donc la suite arithmético-géométrique définie par $u_1=0,5$ et $u_{n+1}=0,1u_n+0,2$.

Le point fixe de (u_n) est $x=\dfrac{0,2}{1-0,1}=\dfrac{0,2}{0,9}=\dfrac{2}{9}$.

On en déduit : $u_n=(u_1-x)\times a^{n-1}+x=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{9}\right)\times 0,1^{n-1}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{5}{18}\times 0,1^{n-1}+\dfrac{2}{9}$.