Table des matières

Définitions, méthodes & formules
En ECP

I. <u>Outils mathématiques</u>

1. Raisonnement

a) Proposition et négation « non » d'une proposition

i. Proposition

Une <u>proposition</u> est un énoncé qui peut être soit vrai (et donc susceptible d'être démontré), soit faux (et donc susceptible d'être réfutée).

ii. Négation d'une proposition

Soit P une proposition. La négation de P est la proposition notée (non P, parfois $\overline{\mathrm{P}}$) qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. Généralement, on remplace la proposition (non P) par une proposition équivalente plus simple.
Par exemple, la négation de $x \leq 2$ est $(\text{non}(x \leq 2))$ que l'on préfèrera écrire $x > 2$.

iii. Négation d'une proposition universelle, d'une proposition existentielle

- La négation de « pour tout x, $\mathrm{P}(x)$ » est « il existe x, non $\mathrm{P}(x)$ ».

  Pour nier une propriété P universelle, on affirme l'existence d'un contre-exemple.
  Ainsi pour infirmer la proposition « tous les chats sont gris », il suffit de trouver un chat (sous-entendu au moins un) non gris.
- La négation de « il existe x, $\mathrm{P}(x)$ » est « pour tout x, non $\mathrm{P}(x)$ ».

  Pour nier une propriété existentielle, on affirme que sa négation est universelle.

  À l'aide des quantificateurs, on note « $\exists\ x$ » pour « il existe x » et « $\forall\ x$ » pour « pour tout x ».

iv. Négations utiles en probabilité

- La négation de « au moins un », est « aucun ».
  Exemple : la négation de « au moins une boule est blanche » est « aucune boule n'est blanche ».
- La négation « tous + affirmation » est « au moins un + négation ».
  Exemple : la négation de « tous sont verts » est « au moins un n'est pas vert ».

b) « ou » et « et »

i. « ou »

- Une proposition de la forme (P ou Q) est vraie si l'une au moins des propositions P ou Q est vraie. Elle est donc également vraie si P et Q sont vraies. Elle n'est fausse que si P et Q sont toutes les deux fausses.
- Le sens de « ou » n'est pas le même dans le langage courant lorsque l'on dit « fromage ou dessert ». Les deux phrases, « nous ne sortirons pas s'il pleut ou s'il vente » et « préférez-vous habiter à la ville ou à la campagne » n'utilisent pas le même sens pour le « ou ».
  En mathématiques, le « ou » est systématiquement inclusif.
  Essayez de comprendre cette blague de mathématicien :
  « C'est un garçon ou une fille ? ». Oui.
- Les propositions « P ou Q » et « Q ou P » sont les mêmes.

ii. « et »

- Par définition, une proposition de la forme (P et Q) est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est fausse. Elle n'est vraie que si P et Q sont vraies.
- Dans le langage courant, la conjonction « et » peut marquer des nuances de la pensée telles que la succession, la conséquence, etc. « J'ai bu l'apéro et je suis parti », « Le roseau plie et ne rompt pas », ...
  En mathématiques, il n'y a pas ces nuances.
- Les propositions « P et Q » et « Q et P » sont les mêmes.
- La négation de « P et Q » est « non P ou non Q » et la négation de « P ou Q » est « non P et non Q »

c) Proposition conditionnelle

i. Proposition directe

Une proposition conditionnelle est une proposition de la forme si … alors …
Exemple : « si je suis en ECP alors j'ai eu un bac pro »
On a bien une proposition de la forme « si P1 alors P2 ».

On note aussi « P1 $\Rightarrow$ P2 ».

Dans ce cas, si P1 est vraie, on peut en déduire que P2 est vraie aussi.

ii. Proposition réciproque

La **<u>réciproque</u>** de la proposition « P1 $\Rightarrow$ P2 » est « P2 $\Rightarrow$ P1».

Exemple : la réciproque de la proposition conditionnelle « si je suis en ECP alors j'ai eu un bac pro » est « si j'ai eu un bac pro alors je suis en ECP ».
On note qu'une proposition réciproque n'a pas la même valeur de vérité que la proposition initiale.

Si on a à la fois « P1 $\Rightarrow$ P2 » vraie et « P2 $\Rightarrow$ P1 » vraie, on dit que P1 est équivalente à P2, et on écrit : « P1 $\Leftrightarrow$ P2 »

iii. Proposition contraposée

La **<u>contraposée</u>** de la proposition « P1 $\Rightarrow$ P2 » est la proposition « non P2 $\Rightarrow$ non P1 » où non P1 et non P2 sont les négations de P1 et P2.
Exemple : la contraposée de la proposition « si je suis en ECP alors j'ai eu un bac pro » est « si je n'ai pas eu un bac pro alors je ne suis pas en ECP ».
On note qu'une proposition contraposée a la même valeur de vérité que la proposition initiale.

iv. Négation d'une proposition conditionnelle

La négation de (P $\Rightarrow$ Q) est équivalent logiquement à (P et (non Q)), c'est-à-dire que, à la fois, P est vraie et Q est fausse.
Exemple : la négation de la proposition « si je suis en ECP alors j'ai eu un bac pro » est « je suis en ECP et je n'ai pas eu un bac pro ». On note que cette négation est évidemment fausse.

v. Condition nécessaire et condition suffisante

Voici deux autres façons d'exprimer que (P $\Rightarrow$ Q) est vraie :

- « pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie ».
  On dit « Q est une condition nécessaire pour P ».
- « pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie ».
  On dit que « P est une condition suffisante pour Q ».

Exemple : « si j'ai mon permis de conduire alors j'ai eu mon code ».
« Avoir son code » est nécessaire pour espérer avoir son permis de conduire.
« Avoir son permis de conduire » suffit pour savoir que la personne a eu son code.

d) Différents types de raisonnement

i. Raisonnement direct

1) Par équivalence

- Il s'agit d'un raisonnement très souvent utilisé, entre autres, dans la résolution d'équations et d'inéquations. Il utilise le symbole « $\Leftrightarrow$ ».
- Exemple 1 :
  Déterminons tous les nombres x qui vérifient $2x+3=7$.
  Tous les nombres x qui vérifient $2x+3=7$, vérifient, par équivalence, $2x+3-3=7-3$...

On écrira plutôt :

$2x+3=7$,

$\Leftrightarrow \quad 2x+3-3=7-3$ (on a soustrait 3 aux deux membres de l'égalité),

$\Leftrightarrow \quad 2x=4$,

$\Leftrightarrow \quad x=\frac{4}{2}$ (on a divisé par 2 les deux membres de l'égalité),

$\Leftrightarrow \quad x=2$.

Ainsi, tous les nombres x qui vérifient $2x+3=7$, vérifient $x=2$!

- Exemple 2 :

Déterminons tous les nombres x qui vérifient $-2x+6\geq 0$.

$-2x+6\geq 0$,

$\Leftrightarrow \quad -2x+6-6\geq 0-6$

(on a soustrait 6 aux deux membres de l'inégalité, ce qui n'en change pas le sens),

$\Leftrightarrow \quad -2x\geq -6$,

$\Leftrightarrow \quad x\leq \frac{-6}{-2}$

(on a divisé par –2 les deux membres de l'inégalité, ce qui en modifie le sens),

$\Leftrightarrow \quad x\leq 3$.

2) Par implication

- C'est souvent le raisonnement le plus utilisé. On ne s'occupe pas de savoir si la réciproque est vraie, celle-ci pouvant être fausse.
- Exemple :

Déterminons tous les nombres x qui vérifient $x=\sqrt{2-x}$.

$x=\sqrt{2-x}$,

$\Rightarrow \quad (x)^2=\left(\sqrt{2-x}\right)^2$ par élévation au carré,

$\Rightarrow \quad x^2=2-x$,

$\Rightarrow \quad x^2+x-2=0$,

$\Rightarrow \quad x=-2$ ou $x=1$ après calcul de $\Delta=9$.

(Pour finir la résolution de l'équation, il suffit, ici, de faire une vérification, ce qui permet d'exclure la solution –2.)

ii. Raisonnement par l'absurde

1) Principe

Le raisonnement par l'absurde consiste à montrer qu'une proposition P est vraie en montrant que son contraire est faux.

1) On suppose que non P est vraie.
2) On étudie les conséquences de cette hypothèse.
3) On aboutit à une incohérence.

2) Exemple

Démontrons qu'il est impossible de diviser un nombre par 0.
C'est-à-dire, démontrons que 0 n'a pas d'inverse.
On suppose la négation de la proposition : on suppose que 0 possède un inverse a.
Cela signifie qu'il existe un nombre a tel que :

$$a \times 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 1$$

C'est absurde.
non P est fausse. On en déduit que P est vraie. 0 n'a donc pas d'inverse : il est impossible de diviser par 0.

iii. Raisonnement par contre-exemple

1) Principe

Raisonnement évoqué en 1. a) iii.
La négation de « pour tout x, $\mathrm{P}(x)$ » est « il existe x, non $\mathrm{P}(x)$ ».
Pour nier une propriété P universelle, on affirme l'existence d'un contre-exemple.
Ainsi pour infirmer la proposition « tous les chats sont gris », il suffit de trouver un chat (sous-entendu au moins un) non gris.

2) Exemple 1

La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x \geq 0$ » est-elle vraie ?
Soit $x = -0,5$, $(-0,5)^2 + (-0,5) = 0,25 - 0,5 = -0,25 < 0$.
On a trouvé un contre-exemple. La proposition est donc fausse.

3) Exemple 2

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.
La proposition « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = 0$ » est-elle vraie ?
Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
$f(x) \times g(x) = x^2 \times \dfrac{1}{x} = x$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$.
On a trouvé un contre-exemple. La proposition est donc fausse.
Pour rappel, la limite de $f(x) \times g(x)$ dans ce cas est indéterminée !

iv. Raisonnement par récurrence

Voir paragraphe II.4. dédié.

v. Bonus : recours à la contraposée et raisonnement par disjonction des cas

1) Recours à la contraposée

- Le principe repose sur le fait qu'une proposition conditionnelle a même valeur de vérité que sa proposition contraposée.

  Ainsi, pour démontrer que P $\Rightarrow$ Q, il est parfois plus facile de montrer que non Q $\Rightarrow$ non P.
- Exemple 1 : théorème du produit nul
  Montrons par contraposition que « si *x* et *y* sont deux réels tels que $x \times y = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$ ».

  La négation de « $x = 0$ ou $y = 0$ » est « $x \neq 0$ et $y \neq 0$ ». Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, il est évident que $x \times y \neq 0$. Le théorème du produit nul est ainsi prouvé.
- Exemple 2 : démontrons que « si $x^3 = 20$ alors $x < 3$ ».
  La négation de « $x < 3$ » est « $x \geq 3$ ». Si $x \geq 3$, alors $x^3 \geq 3^3 = 27$ par stricte croissance de la fonction cube, donc $x^3 \neq 20$. La proposition est ainsi démontrée.

2) Raisonnement par disjonction des cas

- Pour démontrer une propriété, il est parfois nécessaire d'étudier cas par cas, en énumérant tous les cas.
- Exemple : démontrer que $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ est bien un nombre entier.

  Un nombre entier n est soit pair, soit impair.

  1er cas : si *n* est pair, il est divisible par 2 donc $\frac{n}{2}$ est un entier et $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} \times (n-1)$ est bien un entier.

  2e cas : si *n* est impair, alors $n+1$ est pair, donc divisible par 2. Par suite, $\frac{n+1}{2}$ est un entier et $\frac{n(n-1)}{2} = n \times \frac{n+1}{2}$ est aussi un entier.

  Dans tous les cas, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ est bien un nombre entier.

  Remarque : un raisonnement direct était possible en constatant que $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k$!

2. Ensembles, parties d'un ensemble

a) Ensemble, élément, appartenance, inclusion

Le mathématicien Georg Cantor énonçait : « Par ensemble, nous entendons toute collection *A* d'objets *x* de notre intuition ou de notre pensée, définis et distincts, ces objets étant appelés les éléments de *A* ».

L'appartenance d'un élément, noté par exemple *x*, à un ensemble, noté par exemple *A*, s'écrit : $x \in A$. « $x \in A$ » peut se lire :

- « *x* **appartient à** *A* »,
- « *x* **est élément de** *A* »,
- « *x* **est dans** *A* »,
- « *A* **a pour élément** *x* »,
- « *A* **possède** *x* »,
- ou parfois « *A* **contient** *x* » (il y a ambiguïté cependant dans ce dernier cas, *A* contient *x* peut signifier que *x* est un sous-ensemble de *A*, c'est-à-dire que *x* est un ensemble et que tous ses éléments appartiennent à *A*, ce qui est très différent de « *x* **appartient à** *A* »).

  « $x \notin A$ » signifie « *x* n'appartient pas à *A* »

On dit qu'un ensemble *A* est inclus dans un ensemble *B* si tous les éléments de *A* sont aussi éléments de *B*. On note alors $A \subset B$.

L'ensemble vide est l'ensemble qui n'a pas d'éléments, et on le note Ø.

b) Réunion, intersection, ensembles disjoints, complémentaire

- Pour deux ensembles *A* et *B* quelconques, l'ensemble des éléments qui sont soit dans *A* <u>ou</u> dans *B*, est l'ensemble « *A* ou *B* » ou « *A* union *B* » et est noté $A \cup B$.
  On a : $A \cup B = B \cup A$.
- Pour deux ensembles *A* et *B* quelconques, l'ensemble des éléments communs à *A* <u>et</u> à *B*, est l'ensemble « *A* et *B* » ou « *A* intersection *B* » et est noté $A \cap B$.
  On a : $A \cap B = B \cap A$.
- Deux ensembles sont dits disjoints s'ils n'ont pas d'éléments en commun.
  Par exemple $\{1,2,3\}$ et $\{4,5,6\}$ sont deux ensembles disjoints.
- Soit *E* un ensemble. On appelle complémentaire d'un sous-ensemble *A* de *E*, le sous-ensemble de *E* constitué des éléments de *E* qui ne sont pas dans *A* et on le note $\overline{A}$ (on dit : « A barre »).

  Par définition, deux ensembles complémentaires sont disjoints, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.
- Lois de Morgan :
  Le complémentaire de l'union de deux ensembles est l'intersection de leurs complémentaires : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
  Le complémentaire de l'intersection de deux ensembles est l'union de leurs complémentaires : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Le produit cartésien de deux ensembles *X* et *Y*, appelé ensemble-produit, est l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à *X* et la seconde à *Y*. Il est noté $X \times Y$. On généralise cette notion, au produit cartésien de plusieurs ensembles.

c) Cardinal d'un ensemble fini

- Lorsqu'un ensemble est fini, on appelle cardinal de l'ensemble le nombre d'éléments de l'ensemble. En particulier, le cardinal de l'ensemble vide est zéro.
- Formule du crible de Poincaré (formule reliant $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A \cap B)$) :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B),$$

$$\text{ou bien } \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B).$$

- Si *A* et *B* sont disjoints : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ et $\text{card}(A \cap B) = 0$.
- Le cardinal d'un produit cartésien est : $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

  On parle de principe multiplicatif.

3. Calculs numériques et algébriques

a) Calculs numériques

i.Premiers fondamentaux

1) Tables de multiplication et carrés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	2	4									
3	3	6	9								
4	4	8	12	16							
5	5	10	15	20	25						
6	6	12	18	24	30	36					
7	7	14	21	28	35	42	49				
8	8	16	24	32	40	48	56	64			
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81		
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121

Par exemple, 7×7 s'écrit 7^2 et se lit « 7 au carré ».

2) Fraction et décimaux

$$\frac{1}{2}=0,5$$

$$\frac{1}{4}=0,25\ ;\ \frac{3}{4}=0,75$$

$$\frac{1}{5}=0,2\ ;\ \frac{2}{5}=0,4\ ;\ \frac{3}{5}=0,6\ ;\ \frac{4}{5}=0,8$$

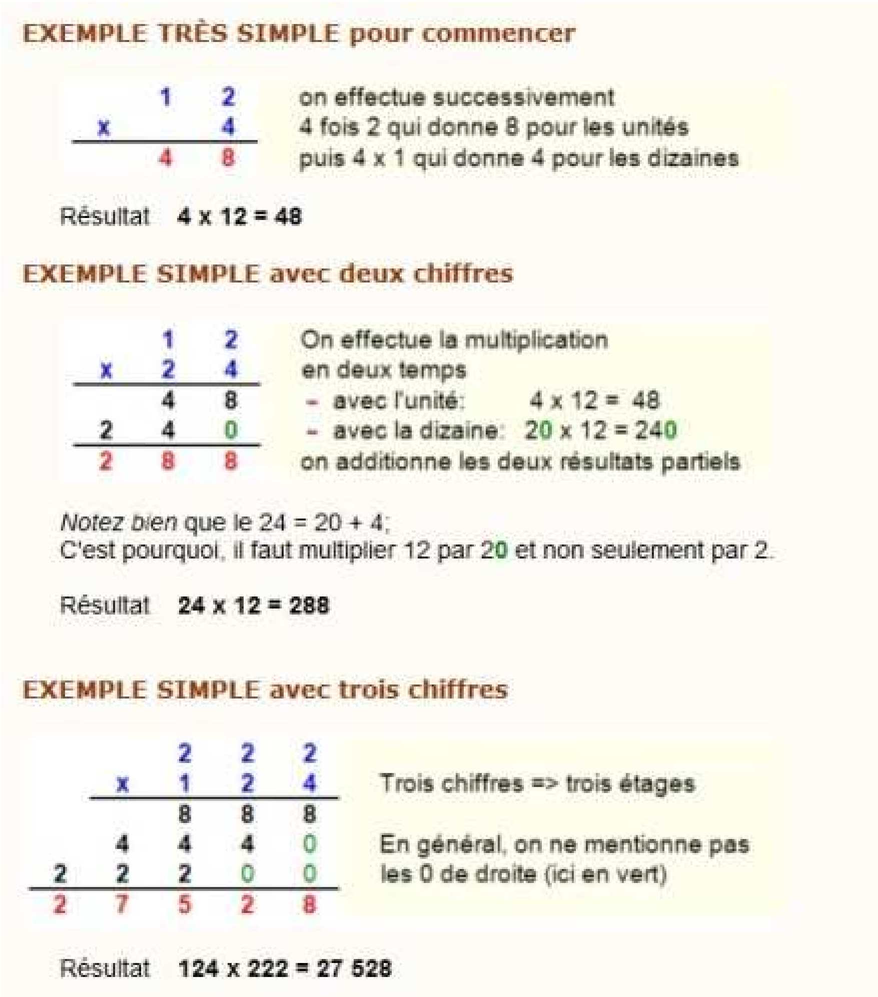
$$\frac{1}{8}=0,125\ ;\ \frac{3}{8}=0,375\ ;\ \frac{5}{8}=0,625\ ;\ \frac{7}{8}=0,875$$

3) Multiplication et division par 10, 100, 1000…

- Pour multiplier par 10, 100, 1000… : on déplace la virgule de un, deux, trois… rangs vers la droite.
- Pour diviser par 10, 100, 1000… : on déplace la virgule de un, deux, trois… rangs vers la gauche.

4) Multiplication posée

Règle : connaître ses tables de multiplication !



EXEMPLE TRÈS SIMPLE pour commencer

	1	2
x		4
	4	8

on effectue successivement
4 fois 2 qui donne 8 pour les unités
puis 4 x 1 qui donne 4 pour les dizaines

Résultat **4 x 12 = 48**

EXEMPLE SIMPLE avec deux chiffres

	1	2
x	2	4
	4	8
2	4	0
2	8	8

On effectue la multiplication
en deux temps
- avec l'unité: 4 x 12 = 48
- avec la dizaine: 20 x 12 = 240

on additionne les deux résultats partiels

Notez bien que le 24 = 20 + 4;
C'est pourquoi, il faut multiplier 12 par 20 et non seulement par 2.

Résultat **24 x 12 = 288**

EXEMPLE SIMPLE avec trois chiffres

		2	2	2
	x	1	2	4
		8	8	8
	4	4	4	0
2	2	2	0	0
2	7	5	2	8

Trois chiffres => trois étages

En général, on ne mentionne pas les 0 de droite (ici en vert)

Résultat **124 x 222 = 27 528**

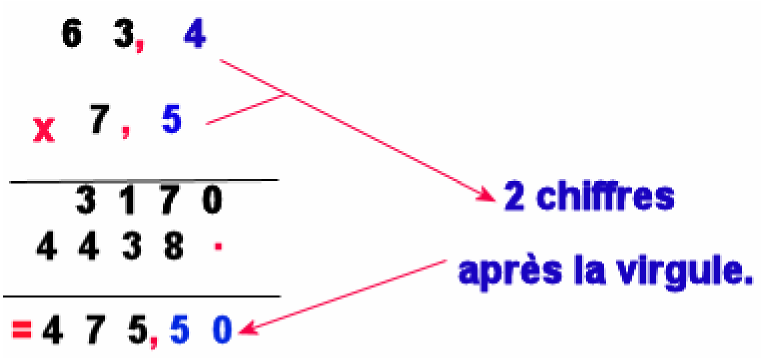
Une vidéo si nécessaire : lien vidéo.

5) Multiplication avec des décimaux

Règle : pour multiplier des nombres décimaux entre eux :
- on effectue la multiplication sans les virgules ;
- le résultat a autant de chiffres après la virgule que la somme des nombres de chiffres après la virgule des deux nombres.

Exemple : on souhaite effectuer $0,2\times 0,4$.

- On effectue d'abord $2\times 4=8$.
- Il y a au total deux chiffres après la virgule. Le résultat final a donc deux chiffres après la virgule. C'est donc 0,08.



Une vidéo : chaîne Youtube d'Yvan Monka
Site associé : https://www.maths-et-tiques.fr/

6) Division posée :

Deux vidéos conseillées, au choix :
https://www.youtube.com/watch?v=liOdPZes24M
https://www.youtube.com/watch?v=ZIwmQ3KSMH0

ii. Calculs avec des nombres relatifs

1) Nombres relatifs

- Un nombre relatif est un nombre qui peut être soit positif, soit négatif (il a un *signe*).

  Exemples : 5 ; -2 ; 3,12 ; $-7{,}125$; $-\frac{7}{3}$…
- L'ensemble des *entiers* (nombres sans virgule) *relatifs* (positifs ou négatifs) est noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des entiers naturels (positifs) est noté $\mathbb{N}$. On a donc $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ (*inclus*).

2) Produit de nombres relatifs

Règle des signes :
- Lorsqu'on multiplie deux nombres positifs, le résultat de la multiplication (qui se nomme le *produit*) est positif.
- Lorsqu'on multiplie deux nombres négatifs, le produit est positif.
- Lorsqu'on multiplie un nombre positif par un nombre négatif, le produit est négatif.

Exemples :

$2\times(-5)$ est négatif et est égal à -10.

$-4\times(-7)$ est positif et est égal à 28.

$(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)$ est positif et est égal à 24.

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=(-1)^7$ est négatif et est égal à -1.

3) Quotient de nombres relatifs

Règle :
Lorsqu'on divise deux nombres relatifs, le signe du résultat de la division (qui se nomme *quotient*) vérifie :

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

4) Somme de nombres relatifs

Règle :

- Lorsqu'on additionne deux nombres de même signe, le résultat de l'addition (qui se nomme la *somme*) est obtenu en additionnant les deux valeurs sans les signes (qui se nomme la *valeur absolue*) puis en « ajoutant » le signe des deux nombres.
- Lorsqu'on additionne deux nombres de signes contraires, la somme est obtenue en effectuant la plus grande valeur moins la plus petite puis en « ajoutant » le signe de la plus grande valeur.

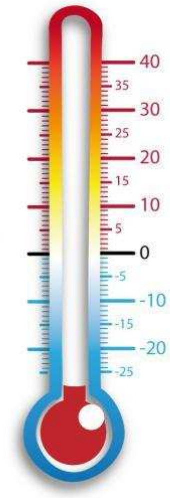
Exemples :

$(-3)+(-5)$: il faut additionner deux nombres de même signe. On additionne 3 et 5, ce qui donne 8. Puis on « ajoute » le signe. Donc $(-3)+(-5)=-8$.

$-8+3$: on doit additionner deux nombres de signes contraires. La plus grande valeur est 8 et la plus petite est 3. On les soustrait, ce qui donne 5. Enfin, on « ajoute » le signe de la plus grande valeur. Donc $-8+3=-5$ et surtout pas -11 comme beaucoup d'élèves le pensent.

Astuces :

Pour additionner des nombres relatifs, vous pouvez utiliser une des deux images mentales suivantes :



- Le thermomètre

On part de 0°C et on descend quand on rencontre un nombre négatif (on se refroidit) et on augmente quand on rencontre un nombre positif (on se réchauffe).
Par exemple, pour effectuer $-8+3$, on part de 0, on descend de 8°C et on remonte de 3°C. Au final, on est descendu de 5°C.

- L'argent !

Vous avez un porte-monnaie et vous perdez de l'argent quand vous rencontrez un nombre négatif et vous en gagnez si vous rencontrez un nombre positif. À la fin, on fait le bilan.
Par exemple, pour effectuer $-8+3$, vous perdez d'abord 8 € puis vous regagnez 3 €. Au final, vous avez quand même perdu 5 €.

5) Différence de nombres relatifs

Règle :
Lorsqu'on soustrait deux nombres relatifs, le résultat de la soustraction (qui se nomme *différence*) vérifie :

$$a-(+b)=a+(-b)=a-b \text{ (addition de l'opposé)}$$

$$a-(-b)=a+b$$

6) Additions et soustractions de plusieurs nombres relatifs

Règle :
On considère le calcul comme une somme de nombres positifs ou négatifs.

- Soit on calcule « de gauche à droite » en appliquant, si besoin, l'astuce du thermomètre ou des euros.
- Soit on regroupe tous les nombres positifs entre eux puis tous les nombres négatifs entre eux et on se ramène à l'addition de deux nombres relatifs.

Exemple :
On souhaite calculer $5+(-4)-6-(-3)+(-1)$.

On gagne 5 €, on perd 4 €, on perd 6 €, on regagne 3 € et on perd 1 € : on a perdu 3 € au final !
Ou bien : la somme des nombres positifs est 8 et la somme des nombres négatifs est -11. $8+(-11)=-3$.

7) Calculs avec plusieurs opérations

Règles des priorités opératoires :
Dans un calcul comportant plusieurs opérations les priorités opératoires sont :
- les parenthèses sont prioritaires ;
- en absence de parenthèses, les puissances sont prioritaires ;
- ensuite les multiplications et les divisions sont prioritaires ;
- enfin, on effectue les additions et les soustractions.

Exemple :

Calculer : $A=5+\left(1+\frac{6}{2}\right)-2^2\times 3$.

Remarque : on procède par étape (on fait une seule chose à chaque fois) dans un calcul *verticalisé* (il est plus facile de voir quel calcul est fait à chaque étape).

$A=5+\left(1+\frac{6}{2}\right)-2^2\times 3$

$\Leftrightarrow$ $A=5+(1+3)-2^2\times 3$ // dans la parenthèse (prioritaire), on commence par la division

$\Leftrightarrow$ $A=5+4-2^2\times 3$ // la parenthèse est prioritaire

$\Leftrightarrow$ $A=5+4-4\times 3$ // le carré (puissance 2) est prioritaire

$\Leftrightarrow$ $A=5+4-12$ // la multiplication est prioritaire

$\Leftrightarrow$ $A=-3$ // reste à effectuer les additions et les soustractions

Vidéos
Playlist (dans Youtube, rechercher « calcul numérique - 5^{e} » :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCap7mFLGFHoR5wgqEhyrnrWY

8) Deux playlists recommandées ***après la lecture du chapitre***

https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaq9IBuon2YB9q3yChTQ20b3
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCao5lUU-DDfTRggnJbLHQOLK

iii. Puissances

1) Définition

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel et a un réel, on note : $a^n=\underbrace{a\times a\times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Exemple : $2^5=2\times 2\times 2\times 2\times 2=32$.

Vidéos :
Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Utiliser la notation des puissances – Quatrième »
« Je possède un livre qui contient 100 000 000 000 000 de poèmes »

2) Propriétés

m et n sont des entiers, a et b sont des réels avec b non nuls :

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}} \qquad (a\times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$$

Exemple : $3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$.

3) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Puissance et exposant : règles de calcul »
« Utiliser les puissances d'exposant négatif – Quatrième »
« EXERCICE : Appliquer les formules sur les puissances - Quatrième »

b) Calculs de fractions

i. Écritures d'une fraction

1) Définition

Un nombre en écriture fractionnaire (pour simplifier : une fraction) est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$. a s'appelle le numérateur et b s'appelle le dénominateur.

L'ensemble des nombres fractionnaires se nomme $\mathbb{Q}$ (comme quotient).

Remarques :

- Un nombre entier est également une fraction. Par exemple, $2 = \frac{2}{1}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Un nombre décimal est également une fraction. Par exemple, $0,51 = \frac{51}{100}$.
- Il existe des fractions qui ne sont ni des entiers, ni des décimaux (comme $\frac{1}{3}$, par exemple).

2) Infinitude des écritures

Une fraction possède une infinité d'écritures fractionnaires. Par exemple, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = ...$

<u>Relation entre les écritures</u> :

$$\boxed{\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b}}$$

3) Simplification d'écriture

Exemple : $\frac{30}{24}=\frac{5\times6}{4\times6}=\frac{5}{4}$.

Ici, on ne peut plus « simplifier ». On dit que l'écriture $\frac{5}{4}$ est *irréductible*.

4) Réduction au même dénominateur

Exemple : il est possible de *réduire au même dénominateur* $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 4 (le dénominateur de la deuxième) et de multiplier le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction par 3 (le dénominateur de la première).

Ainsi : $\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$ et $\frac{1}{4}=\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{3}{12}$.

Remarque :

Cette technique, importante, permettra d'effectuer des additions ou des soustractions, et permet aussi de comparer deux fractions (pour savoir, par exemple, qui est la plus grande sans calculatrice).

5) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :

« Modifier une fraction - Sixième »

« Modifier une fraction - Cinquième »

« Simplifier une fraction - Sixième »

« Simplifier une fraction - Cinquième »

« EXERCICE : Modifier une fraction - Sixième »

6) Multiplication de deux fractions

1) Règle

La multiplication de fractions est la seule opération « naturelle » pour les élèves :

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

Autrement dit, on a multiplié les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple :

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.

Remarque :

Il est parfois plus judicieux de simplifier <u>avant</u> d'effectuer.

Exemple :

$\frac{4}{3}\times\frac{27}{8}=\frac{4\times27}{3\times8}=\frac{108}{24}=\frac{54\times2}{12\times2}=\frac{54}{12}=\frac{9\times6}{2\times6}=\frac{9}{2}$ est un calcul parfaitement exact.

Mais il aurait été beaucoup plus subtil de simplifier avant d'effectuer :

$\frac{4}{3}\times\frac{27}{8}=\frac{4\times27}{3\times8}=\frac{4\times9\times3}{3\times4\times2}=\frac{9}{2}$ (on a simplifié par 3 et par 4 avant de calculer).

2) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Effectuer des multiplications de fractions (1) - Quatrième »
« Effectuer des multiplications de fractions (2) - Quatrième »
« Effectuer des multiplications de fractions - avec relatifs – Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des multiplications de fractions - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des multiplications de fractions - avec relatifs - Quatrième »

ii. Division de deux fractions

1) Inverse d'un nombre, d'une fraction

Deux nombres sont inverses lorsque leur produit est égal à 1.

L'inverse d'un nombre a est $\frac{1}{a}$ (car $a\times\frac{1}{a}=\frac{a}{1}\times\frac{1}{a}=1$).

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

2) Règle

La division est la deuxième opération la plus facile après la multiplication. Elle repose sur la propriété : « diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse ».

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}$$

Exemple :

$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

3) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Déterminer l'inverse d'un nombre - Quatrième »
« Effectuer des divisions de fractions - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des divisions de fractions - Quatrième »

iii. Additions et soustractions de fractions

1) Règle

L'addition et la soustraction sont les opérations de fractions les plus difficiles sauf si les deux nombres ont le même dénominateur. Dans ce cas, la règle est :

$$\boxed{\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}}$$

Attention : ***le dénominateur reste le même***.

Exemples :

$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$ et $\frac{3}{11}-\frac{8}{11}=-\frac{5}{11}$

Vidéo :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Effectuer une addition ou une soustraction de fractions de même dénominateur - Sixième »

2) Cas général

Dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où les deux fractions n'ont pas le même dénominateur, il est nécessaire, d'abord, de les réduire au même dénominateur (voir **I.**).

3) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Effectuer des additions et soustractions de fractions (1) - Quatrième »
« Effectuer des additions et soustractions de fractions (2) - Quatrième »
« Effectuer des additions et soustractions de fractions - avec relatifs (1) - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des additions et soustractions de fractions - Quatrième »
« EXERCICE : Effectuer des additions ou soustractions de fractions - avec relatifs - Quatrième»

c) Calculs algébriques

i. Calcul algébrique / littéral

1) Introduction

C'est vers le XVIe siècle que l'on voit avec le calcul algébrique, apparaître les mathématiques « modernes ». Auparavant il n'était pratiqué que le calcul numérique ou l'algèbre chaloupée (écrite en langue commune).

Le calcul algébrique combine lettres et nombres, et des opérations.

La grande différence entre le calcul numérique et le calcul algébrique est que le premier a pour but de ne donner qu'un résultat particulier alors que le second permet de trouver une formule générale, ou de démontrer, par exemple.

2) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Exprimer EN FONCTION DE... - Cinquième »
« Réduire une expression - Quatrième »
« EXERCICE : Réduire une expression - Quatrième »

ii. Développer et réduire

1) Principe

Développer, c'est transformer un produit en une somme ou une différence.
Réduire une expression, c'est regrouper les termes « semblables » et effectuer les calculs.
Exemple de réduction :
$2b+5a+5-5b+a-3=6a-3b+2$ (on a regroupé les a avec les a, les b avec les b…)

2) Règles du développement

$ab=ba$, c'est-à-dire, $a\times b=b\times a$.

$k(a+b)=ka+kb$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ (double distributivité)

Exemples :

① $2(3x+5)=6x+10$.

② $-x(2x-3)=-2x^2+3x$.

③ $(x+1)(x+2)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2$.

④ $(2x-1)(3x-2)=6x^2-4x-3x+2=6x^2-7x+2$.

3) Vidéos : il est nécessaire de beaucoup s'entraîner !

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Simplifier une expression (1) - Cinquième »
« Simplifier une expression (2) - Cinquième »
« EXERCICE : Simplifier une expression - Cinquième »
« Appliquer la formule de distributivité - Quatrième »
« Développer une expression (Niv.1) - Quatrième »
« Développer une expression (Niv.2) - Quatrième »
« EXERCICE : Développer une expression - Quatrième »
« Développer et réduire une expression - Quatrième »
« EXERCICE : Développer et réduire une expression - Quatrième »
« LE COURS : Développements - Troisième »
« Développer en utilisant la distributivité - Troisième »
« Développer en utilisant la double distributivité (1) - Troisième »
« Développer en utilisant la double distributivité (2) - Troisième »
« EXERCICE : Développer une expression - Troisième »

4) Les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

① $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

② $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

③ $(x-6)(x+6) = x^2 - 36$.

5) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Développer en utilisant les identités remarquables - Troisième »
« Développer à l'aide de l'identité remarquable (a-b)(a+b)=a²-b² »
« Développer une expression complexe - Troisième »
« Développer une expression - Seconde »
« Utiliser les identités remarquables - Seconde »

iii. Factoriser

1) Principe

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en produit.
En mathématiques, un facteur est un élément qui compose un produit (on parle de produit de facteurs). Par exemple, le produit 2×3 comporte deux facteurs : 2 et 3.

2) Règles de factorisation

Il suffit d'appliquer les égalités du paragraphe précédent « de droite à gauche ».

$$ka + kb = k(a+b)$$

Exemples :

① $5x + 25 = 5(x+5)$.

② $x^2 - 3x = x(x-3)$.

3) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Factoriser une expression (Niv.1) - Quatrième »
« Factoriser une expression (Niv.2) - Quatrième »
« EXERCICE : Factoriser une expression - Quatrième »
« LE COURS : Factorisations - Troisième »
« Factoriser en reconnaissant un facteur commun (1) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser en reconnaissant un facteur commun (1) - Troisième »

« Factoriser en reconnaissant un facteur commun (2) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser en reconnaissant un facteur commun (2) - Troisième »
« Factoriser avec facteur commun - Seconde »

4) Les identités remarquables

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Vidéos :
Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Factoriser à l'aide de l'identité remarquable a²-b²=(a-b)(a+b) »
« Factoriser en utilisant les identités remarquables (1) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser et développer en utilisant les identités remarquables - Troisième »
« Factoriser en utilisant les identités remarquables (2) - Troisième »
« EXERCICE : Factoriser en utilisant les identités remarquables (2) - Troisième »
« QCM : Les factorisations - Troisième »
« Factoriser avec une identité remarquable - Seconde »
« EXERCICE : Factoriser avec une identité remarquable - Seconde »

5) Réduction au même dénominateur

Réduire au même dénominateur deux fractions revient à effectuer une factorisation.
Exemple :
① $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x\times3+1\times2}{2\times3}=\frac{3x+2}{6}$. C'est comme si on factorisait par $\frac{1}{6}$ car $\frac{3x+2}{6}=\frac{1}{6}(3x+2)$.
② $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1\times(x+1)-1\times x}{x\times(x+1)}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$.

Vidéos :
Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Réduire au même dénominateur - Seconde »
« EXERCICE : Réduire au même dénominateur - Seconde »
« QCM : Le calcul algébrique - Seconde »

d) Équations et inéquations

i. Équations

1) Notion d'égalité

Une égalité est une écriture mathématique qui s'écrit avec le signe « = » séparant deux expressions.
Une égalité est vraie ou fausse.
Exemples :
① $5-2=4$.
② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
L'égalité ① est évidemment fausse tandis que l'égalité ② est vraie.
Vidéos :
Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Tester une égalité - Cinquième »
« EXERCICE : Tester une égalité - Cinquième »

2) Notion d'équation

Une équation est une égalité dans laquelle un (ou plusieurs) terme(s) n'est (ne sont) pas connu(s). Le terme qui n'est pas connu est remplacé par une lettre et appelé : l'inconnue.
Exemples :
① $2+x=5$.
② $y^2+y-2=0$.

3) Résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue, si elles existent, pour que l'égalité soit vraie.
Lorsque c'est le cas, on dit alors que le nombre cherché est une solution de l'équation.
Exemples :
① Si on remplace x par 3, l'équation $2+x=5$ est vérifiée. 3 est solution de l'équation.
② Si on remplace y par 1, l'équation $y^2+y-2=0$ est vérifiée. 1 est solution de l'équation.
On peut se poser la question de savoir s'il y a d'autres solutions. C'est l'objet du paragraphe suivant.
Vidéos :
Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Vérifier si un nombre est solution d'une équation - Quatrième »
« EXERCICE : Vérifier si un nombre est solution d'une équation - Quatrième »

4) Méthode de résolution : addition et soustraction

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité ne modifie pas l'égalité.

Exemples :

① On souhaite résoudre l'équation : $x-3=5$.

$x-3=5$

$\Leftrightarrow \quad x-3+3=5+3$ // on a ajouté 3 aux deux membres (question : pourquoi 3 ?)

$\Leftrightarrow \quad x=8$

En pratique, on écrit :

$x-3=5$

$\Leftrightarrow \quad x=5+3=8$

② On souhaite résoudre l'équation : $x+5=-2$.

$x+5=-2$

$\Leftrightarrow \quad x+5-5=-2-5$ // on soustrait 5 aux deux membres (question : pourquoi 5 ?)

$\Leftrightarrow \quad x=-7$

En pratique, on écrit :

$x+5=-2$

$\Leftrightarrow \quad x=-2-5=-7$

③ On souhaite résoudre l'équation : $2x+1=x+3$.

$2x+1=x+3$

$\Leftrightarrow \quad 2x-x=3-1$

$\Leftrightarrow \quad x=2$

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :

« Résoudre une équation (1) - Troisième »

5) Méthode de résolution : multiplication et division

Multiplier ou diviser par un même nombre les deux membres d'une égalité ne modifie pas l'égalité.

Exemples :

① On souhaite résoudre l'équation : $2x=8$.

$2x=8$

$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$ // on divise par 2 les deux membres (question : pourquoi 2 ?)

$\Leftrightarrow \quad x=4$

En pratique, on écrit :

$2x=8$

$\Leftrightarrow \quad x=\frac{8}{2}=4$

② On souhaite résoudre l'équation : $\frac{x}{3}=4$.

$$\frac{x}{3}=4$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{3}\times 3=4\times 3$ // on multiplie par 3 les deux membres (question : pourquoi 3 ?)

$\Leftrightarrow \quad x=12$

En pratique, on écrit :

$$\frac{x}{3}=4$$

$\Leftrightarrow \quad x=4\times 3=12$

6) Vidéos (chapitre qui nécessite de l'entraînement)

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Résoudre une équation (2) - Troisième »
« Résoudre une équation (3) - Troisième »
« Résoudre une équation (4) - Troisième »
« Résoudre une équation (5) - Troisième »
« EXERCICE : Résoudre une équation - Troisième »
« Résoudre une équation contenant des fractions - Troisième »
« Résoudre une équation - Seconde »
« EXERCICE : Résoudre une équation - Seconde »

7) Équations produit

Une équation produit est une équation de la forme $A\times B=0$.

On a : $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$.

Exemple : on souhaite résoudre l'équation $(2x+1)(3x-1)=0$.

$(2x+1)(3x-1)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0$ ou $3x-1=0$.

Dès lors :

	$2x+1=0$		$3x-1=0$
$\Leftrightarrow$	$2x=-1$	$\Leftrightarrow$	$3x=1$
$\Leftrightarrow$	$x=-\frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow$	$x=\frac{1}{3}$

L'équation possède deux solutions : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Vidéos :

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« LE COURS : Les équations - Troisième »
« Résoudre une équation-produit - Troisième »
« Résoudre une équation-produit (1) - Seconde »
« EXERCICE : Résoudre une équation-produit - Troisième »
« EXERCICE : Développer, factoriser une expression - Seconde »

ii. Inéquations

1) Notion d'inéquation

Une inéquation est une inégalité entre deux expressions dans laquelle un (ou plusieurs) terme(s) n'est (ne sont) pas connu(s). Un des 4 symboles suivant est utilisé : $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$.

2) Méthode de résolution

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne modifie pas le sens de l'égalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre ***positif*** les deux membres d'une inégalité ne modifie pas le sens de l'égalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre ***négatif*** les deux membres d'une inégalité inverse le sens de l'égalité.
Exemples :

① On souhaite résoudre l'inéquation : $-2x \geq 4$.

$-2x \geq 4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{-2}$ // on a inversé le sens de l'inégalité car on a divisé par -2 qui est négatif

$\Leftrightarrow \quad x \leq -2$

② On souhaite résoudre l'équation : $2x+5 \geq 0$.

$2x+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x \geq -5$ // on soustrait 5 aux deux membres : le sens n'est pas modifié

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{-5}{2}$ // on divise par 2 qui est positif : le sens n'est pas modifié

③ On souhaite résoudre l'équation : $-3x+4 < -x+2$.

$-3x+4 < x+2$

$\Leftrightarrow \quad -3x+x < 2-4$ // on ajoute x et on soustrait 4 : le sens n'est pas modifié

$\Leftrightarrow \quad -2x < -2$

$\Leftrightarrow \quad x > \frac{-2}{-2}$ // on divise par -2 qui est négatif : on inverse le sens

$\Leftrightarrow \quad x > 1$

3) Vidéos

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« LE COURS : Les inéquations - Troisième »
« Effectuer des opérations sur les inégalités – Troisième »
« Résoudre une inéquation - Troisième »
« Résoudre une inéquation - Seconde »
« EXERCICE : Résoudre une inéquation - Troisième »

iii. Résolution de systèmes par la méthode du pivot de Gauss

1) Principe

Il s'agit de résoudre des systèmes tels que :

1. $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

2) Opération sur les lignes d'un système

Les opérations suivantes ne modifient pas les solutions d'un système :

- Permuter deux lignes, $L_1 \leftrightarrow L_2$
- Multiplier les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, $L_1 \leftarrow \alpha L_1$
- Remplacer une ligne par la somme de cette même ligne avec un multiple d'une autre ligne, $L_1 \leftarrow L_1 + \beta L_2$
- Exprimer, à partir d'une équation, l'une des inconnues en fonction des deux autres et la substituer dans les deux autres équations

3) Méthode du pivot de Gauss : comment créer un 0 sous un pivot

Soient les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \boxed{a\,x} + b\,y = c & L_1 \\ a'x + b'y = c' & L_2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \boxed{a\,x} + b\,y + c\,z = d & L_1 \\ a'x + b'y + c'z = d' & L_2 \\ a''x + b''y + c''z = d'' & L_3 \end{cases}$

L'opération $L_2 \leftarrow a'L_1 - a\,L_2$ permet de créer un 0 sous le pivot $\boxed{a\,x}$ de L_1.

4) Exemple d'un système de deux équations / écriture matricielle

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & L_1 \\ 3x + 4y = 2 & L_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x} - 3y = 5 & L_1 \\ \quad -17y = 11 & 3L_1 - 2L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -3 & 5 \\ 0 & -17 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ 3L_1 - 2L_2 \end{array}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 34x \quad = 52 & 17L_1 - 3L_2 \\ \quad \boxed{-17y} = 11 & L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 34 & 0 & 52 \\ 0 & \boxed{-17} & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} 17L_1 - 3L_2 \\ L_2 \end{array}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 52/34 = 26/17 & L_1/34 \\ y = -11/17 \quad L_2/2 & L_2/-17 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 52/34 \\ 0 & 1 & 11/-17 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/34 \\ L_2/-17 \end{array}$$

(simplification)

5) Exemple de résolution d'un système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 13 & L_1 \\ x + y + z = 4 & L_2 \\ x - y + z = 2 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x} + 3y + 4z = 13 & L_1 \\ y + 2z = 5 & L_1 - 2L_2 \\ 5y + 2z = 9 & L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 13 & L_1 \\ \boxed{y} + 2z = 5 & L_2 \\ 8z = 16 & 5L_2 - L_3 \end{cases}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 13 & L_1 \\ y + 2z = 5 & L_2 \\ z = 2 & L_3 / 8 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 & L_1 - 4L_3 \\ y = 1 & L_2 - 2L_3 \\ \boxed{z} = 2 & L_3 \end{cases}$$

(troisième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 & L_1 - 3L_2 \\ \boxed{y} = 1 & L_2 \\ z = 2 & L_3 \end{cases}$$

(quatrième étape)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 & L_1 / 2 \\ y = 1 & L_2 \\ z = 2 & L_3 \end{cases}}$$

(simplification)

iv. Résolution d'équations du second degré

- $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Pas de solution	**Une racine double :** $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	**Deux racines distinctes :** $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

v. Résolution d'équations du troisième degré

- Pour déterminer les racines d'un polynôme P du troisième degré, on cherche une racine évidente *a* puis soit on effectue la division euclidienne de P par $x - a$, soit on applique l'algorithme de Hörner.

Exemple : Déterminer les racines du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$.

$\mathrm{P}(1) = 2\times1^3 - 1^2 - 7\times1 + 6 = 0$, donc 1 est racine (évidente).

Méthode 1 : on effectue la division euclidienne de P par $x-1$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & -7x & +6 & x-1 \\
\cline{5-5}
2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 + x - 6 \\
\cline{1-4}
 & x^2 & -7x & +6 & \\
 & x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & & -6x & +6 & \\
 & & -6x & +6 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Méthode 2 : on applique l'algorithme de Hörner.

	2	− 1	− 7	6
1		2	1	− 6
	2	1	− 6	0

On en déduit que $\mathrm{P}(x) = (x-1)\left(2x^2 + x - 6\right)$.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $2x^2 + x - 6$ à l'aide du discriminant (on trouve $\Delta = 49$ puis –2 et 3/2.
Les trois racines de P sont –2, 1 et 3/2.

4. Notion de fonction

a) Notion de fonction

i. Définition

$\mathcal{D}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.
Une fonction associe à chaque réel x de l'ensemble de départ $\mathcal{D}$, un réel et un seul y, appelé l'image de x. $\mathcal{D}$ est appelé ensemble de définition de la fonction.

ii. Notations

- Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres f, g, h....
- L'image d'un réel x de D par la fonction f est notée aussi $f(x)$ (lire : "f de x"). On a donc : $y = f(x)$.
- Au lieu d'écrire "f est la fonction qui à x associe $f(x)$" on peut écrire "$f : x \mapsto f(x)$".

iii. Trois façons de définir une fonction

- Avec un graphique (voir paragraphe **II.**).
- Avec un tableau :
  Par exemple, ce tableau définit une fonction g qui à chaque nombre de la 1re ligne associe un nombre de la 2e ligne.

Nombre x	0	1	2	3	4	5
Image $g(x)$	–5	–3	0	5,2	0	7

- Avec une formule (voir paragraphe **III.**).

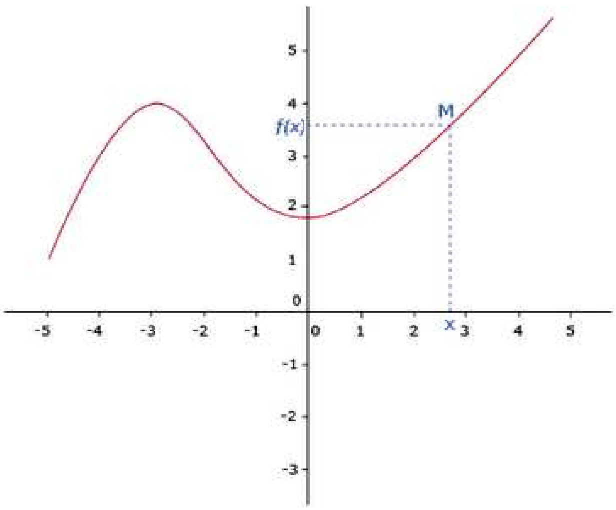
b) Courbe représentative d'une fonction (représentation graphique)

i. Définition :

f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Dans un repère, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f, est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :

$$x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(x).$$

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$ dans ce repère.



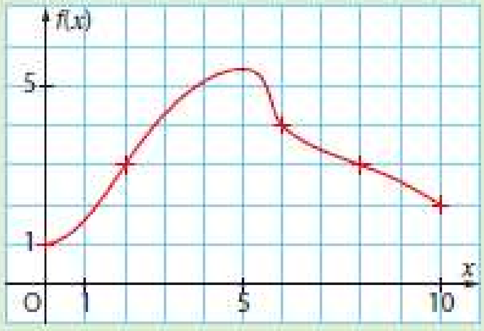
ii. Lecture graphique d'image et d'antécédent(s) :

f est la fonction définie par le graphique ci-contre.

a. Lire l'image de 2, puis l'image de 5.

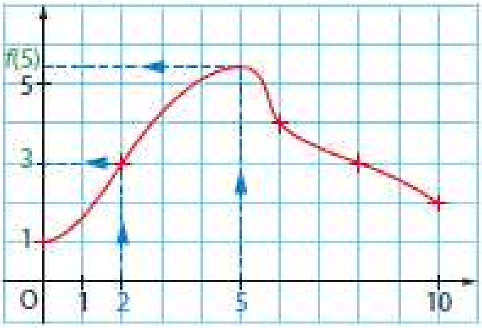
b. Lire les antécédents de 2.

c. Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent.



Solution

a. L'image de 2 est 3. Ainsi $f(2) = 3$.

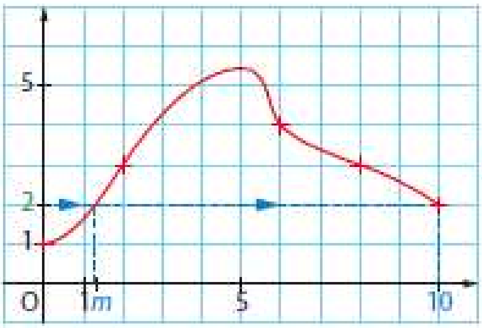


Méthode Pour lire l'image de 2 :
- on place 2 sur l'axe des abscisses ;
- on se déplace « verticalement » jusqu'à la courbe, puis « horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées ;
- ce trajet aboutit à 3 sur l'axe des ordonnées : c'est l'image de 2.

L'image de 5 est approximativement 5,5. Ainsi $f(5) \approx 5{,}5$.

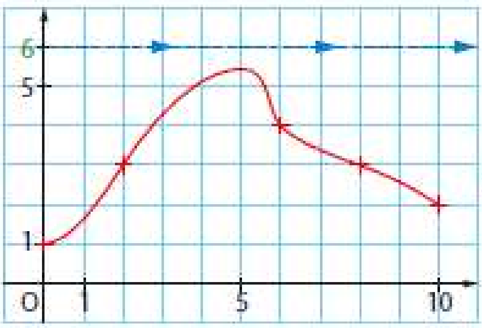
Le graphique ne permet pas de donner la valeur exacte de l'image de 5 : on lit une valeur approchée.

b. 2 a deux antécédents : 10 et un nombre *m* égal approximativement à 1,2.



Méthode Pour lire les antécédents de 2, c'est-à-dire les nombres dont l'image est 2 :
- on place 2 sur l'axe des ordonnées ;
- on se déplace « horizontalement » jusqu'à la courbe, puis « verticalement » jusqu'à l'axe des abscisses ;
- ce trajet aboutit à *m* et à 10 sur l'axe des abscisses : ce sont les antécédents de 2.

c. Le nombre 6 n'a pas d'antécédent.



À partir de 6 sur l'axe des ordonnées, on se déplace « horizontalement », mais ce trajet ne rencontre jamais la courbe.

c) Fonctions définies par une formule (une expression)

i. Principe et premier exemple

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-2\sqrt{x}$.

Cette phrase indique que l'ensemble de définition de cette fonction est $[0\,;+\infty[$ (on ne peut donc pas considérer des x négatifs) et que pour calculer l'image d'un nombre positif, on procède ainsi :

• image de 0 : $f(0)=0-2\sqrt{0}=0$

• image de 1 : $f(1)=1-2\sqrt{1}=1-2=-1$

ii. Calcul d'une image

Pour calculer une image, il suffit de **remplacer la variable** (en général notée $\boldsymbol{x}$) dans l'expression de $f(x)$.

f est la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
Calculer : **a.** $f(5)$ **b.** $f(-4)$

Solution

a. $f(5) = 3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 4$
$f(5) = 3 \times 25 - 10 + 4$
$f(5) = 75 - 10 + 4$
$f(5) = 69$

Méthode Pour calculer $f(5)$:
• on remplace x par 5 dans l'expression $3x^2 - 2x + 4$ en pensant à rajouter les signes $\times$ nécessaires ;
• on effectue le calcul en respectant les règles de priorité.

b. $f(-4) = 3 \times (-4)^2 - 2 \times (-4) + 4$
$f(-4) = 3 \times 16 + 8 + 4$
$f(-4) = 48 + 8 + 4$
$f(-4) = 60$

Lorsqu'on remplace x par -4, on pense à l'écrire entre parenthèses.

iii. Calcul, s'il existe, d'un antécédent

Pour déterminer, s'il existe, un antécédent, on cherche à résoudre l'équation $f(x)=y$ où y est l'image connue et où x est l'inconnue.

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.
Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 16 par la fonction f.

Correction

On note x un nombre dont l'image est 16.
x est solution de l'équation $f(x) = 16$ soit $3x - 5 = 16$.
$3x = 16 + 5 = 21$ donc $x = 21 \div 3 = 7$
$7 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
Donc, 7 est l'unique antécédent de 16 par la fonction f.

iv. Vidéos sur tout le cours des fonctions

Dans Youtube, sur la chaîne d'Yvan Monka, rechercher :
« Lire graphiquement une image et un antécédent - Troisième »
« EXERCICE : Lire graphiquement une image et un antécédent - Troisième »

« Déterminer une image et un antécédent dans un tableau - Troisième »
« EXERCICE : Déterminer une image et un antécédent dans un tableau - Troisième »
« Calculer une image par une fonction - Troisième »
« EXERCICE : Calculer une image par une fonction - Troisième »
« Compléter un tableau de valeurs - Troisième »
« Représenter graphiquement une fonction - Troisième »
« Déterminer un antécédent d'un nombre - Seconde »
« EXERCICE : Déterminer une image et un antécédent par une fonction - Seconde »

II. <u>Suites</u>

1. Suites arithmétiques (et constantes)

a) Formulation

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 ou u_1 et de raison a.

b) Formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = ... \\ u_{n+1} = u_n + a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = ... \\ u_{n+1} = u_n + a \end{cases}$$

c) Formule explicite

$u_n = a\,n + u_0$ ou $u_n = a(n-1) + u_1$ (à développer !)

d) Démontrer qu'une suite est arithmétique ou constante

i. À partir de sa formule explicite

Toute suite affine $(u_n = an + b)$ est arithmétique.

Toute suite arithmétique de raison 0 est constante.

ii. En calculant $u_{n+1} - u_n$

Si le résultat est égal à une constante *a* non nulle (il n'y a plus de *n*), la suite est arithmétique de raison *a*.
Si le résultat est égal à 0, la suite est constante.

e) Somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique *(Programme 2023)*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + ... + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + ... + u_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de S}) + (\text{dernier terme de } S)}{2}$$

2. Suites géométriques

a) Formulation

(u_n) est la suite géométrique de premier terme u_0 ou u_1 et de raison *b*.

b) Formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = ... \\ u_{n+1} = b \times u_n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = ... \\ u_{n+1} = b \times u_n \end{cases}.$$

c) Formule explicite

$$u_n = u_0 \times b^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_1 \times b^{n-1}.$$

d) Démontrer qu'une suite est géométrique

i. À partir de sa formule explicite

Toute suite exponentielle $\left(u_n = a \times b^n\right)$ est géométrique.

ii. En calculant u_{n+1}

Le résultat doit être un multiple de u_n, le coefficient étant la raison.

e) Somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique *(Programme 2023)*

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1-b^n}{1-b} \quad \text{ou} \quad (\text{premier terme}) \times \frac{b^n - 1}{b-1}$$

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1-(\text{raison})}$$

3. Suites arithmético-géométriques

a) Formulation

(u_n) est une suite arithmético-géométrique.

b) Formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = ... \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = ... \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \end{cases} \quad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } b \neq 0.$$

c) Formule explicite

i. Formule explicite directe *(programme 2023)*

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} \quad \text{ou} \quad a^{n-1}\left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

ii. Détermination en 3 étapes

1. Point fixe : on détermine x tel que $a\,x+b=x \Leftrightarrow x=\dfrac{b}{1-a}$
2. On pose $v_n = u_n - x$.
   $\left(v_n\right)$ est la suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - x$ ou $v_1 = u_1 - x$.
   On a donc : $v_n = v_0 \times a^n$ ou $v_n = v_1 \times a^{n-1}$.
3. Finalement, $u_n = v_n + x = v_0 \times a^n + x$ ou $v_1 \times a^{n-1} + x$.

4. Démonstration par récurrence

a) Principe, illustration et 4 types de récurrence

Une démonstration par récurrence est une méthode pour démontrer qu'une propriété qui dépend d'un entier n quelconque est vraie (il y a donc en fait une infinité de propriétés).
Une démonstration par récurrence comprend trois étapes :
- l'initialisation : on remplace n par 0 ou par 1 ou par un autre nombre (le premier rang - il n'y a donc pas de n dans cette étape),
- l'hérédité : on démontre que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$ (c'est l'étape la plus difficile),
- la conclusion

Voir la vidéo dédiée : lien Youtube

b) Rédactions-type

i. Rédaction dans le cas général

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, ...

★ ...

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ $\left(\text{ou } n \in \mathbb{N}^*\right)$. On suppose que la proposition est vraie au rang n, c'est-à-dire que $\left(P_n\right)$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

...

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$ $\left(\text{ou de } \mathbb{N}^*\right)$.

ii. Cas d'une puissance

Pour effectuer l'hérédité d'une démonstration par récurrence qui concerne *une puissance*, on peut commencer par écrire : $\square^{n+1}=\square^{n}\times\square$ ou $\square^{n+1}=\square\times\square^{n}$.

Exemple :

On suppose qu'il existe trois matrices *A*, *P* (inversible) et *D* telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $A^n = PD^nP^{-1}$.

★ $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$. La proposition est vraie au rang 0.

★ Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que la proposition est vraie au rang *n*, c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^n \underbrace{P^{-1}\times P}_{I} DP^{-1} = P\underbrace{D^nID}_{D^{n+1}}P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

iii. Cas d'une relation de récurrence

Pour effectuer l'hérédité d'une démonstration par récurrence qui concerne *une relation de récurrence*, on peut commencer à partir de la relation de récurrence.

Exemple :

On considère une suite de matrices de matrice initiale X_1 définie par $X_{n+1} = AX_n$.

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n = A^{n-1}X_1$.

★ $A^{1-1}X_1 = IX_1 = X_1$. La proposition est vraie au rang 1.

★ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition est vraie au rang *n*, c'est-à-dire que $X_n = A^{n-1}X_1$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$\underbrace{X_{n+1} = AX_n}_{\text{Relation de récurrence}} = A\times \underbrace{A^{n-1}X_1}_{\substack{\text{hypothèse}\\ \text{de récurrence}\\ \text{rang } n}} = \underbrace{A^nX_1}_{\text{rang } n+1}.$$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$.

iv. Cas d'une inégalité

Pour effectuer l'hérédité d'une proposition comportant une inégalité, on part de l'inégalité au rang *n* et on reconstruit l'inégalité au rang $n+1$.

Voir si besoin les méthodes de manipulation d'inégalités développées dans « Questions classiques sur les fonctions ».

Exemple :

Données : *g* est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2-\mathrm{e}^{-x}$.
On sait que *g* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0=1$ et $u_{n+1}=g(u_n)$.

Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel *n*.

★ $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$. La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang *n*, c'est-à-dire que $1 \leq u_n \leq 2$.

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$1 \leq u_n \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad g(1) \leq g(u_n) \leq g(2)$ car *g* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Or, $g(1) = 2 - \mathrm{e}^{-1} \approx 2 - 0{,}37 \geq 1$, $g(2) = 2 - \mathrm{e}^{-2} \leq 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

On en déduit que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

5. Étude des variations d'une suite

a) Définitions

Une suite (u_n) est croissante si, pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

b) Méthode 1 : signe de la différence

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, (u_n) est croissante, si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, (u_n) est décroissante et si $u_{n+1} - u_n = 0$, (u_n) est constante

c) Méthode 2 : démonstration par récurrence

On démontre par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} \leq u_n$ (nécessite de calculer les deux premiers termes de la suite).

6. Théorèmes de convergence et limites

a) Limite de b^n

À retenir : $|b| < 1 \Leftrightarrow -1 < b < 1$

Si $|b| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Si $b > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$.

Si $b = 1$, $b^n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 1$.

b) Théorème de limite monotone

i. Définitions

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Une suite (u_n) est bornée s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

ii. Théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente (on ne connait pas, à ce stade, la limite).

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

c) Théorèmes de comparaison

i. Théorème de majoration

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

ii. Théorème de minoration

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

iii. Théorème d'encadrement

Appelé aussi théorème des gendarmes.

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

iv. Autres méthodes

Voir les méthodes sur les limites des fonctions.

7. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Calcul des termes

Les termes se calculent de proche en proche (u_1 grâce à u_0, puis u_2 grâce à u_1, puis u_3 grâce à u_2, etc.)

Tous les termes de la suite existent si u_0 (ou le premier terme) est situé dans un intervalle *stable* pour *f*.
On dit que *I* est un intervalle stable pour *f* si $f\left(I\right)\subset I$.

b) Convergence

Voir paragraphe dédié précédent (théorème de convergence monotone, de comparaison...).

c) Théorème du point fixe.

Soit $x\in I$. On dit que *x* est un point fixe si $f\left(x\right)=x$.

Soit une suite *u* définie par u_0 et, pour tout *n*, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

Si *f* est continue sur *I* et si *u* est convergente, alors : $\ell = f\left(\ell\right)$.

ℓ, si elle existe, est donc un point fixe de *f*.
Ce théorème implique que la convergence de *u* doit être établie par ailleurs.

8. Sommes finies de termes

a) Définition

Pour représenter la somme d'une suite de termes, on utilise le symbole de sommation Σ (sigma en capitale). On le définit ainsi :

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_p = \sum_{i=m}^{p} a_i \text{ où}$$

les $a_m, \dots, a_p$ sont les termes successifs allant du rang *m* jusqu'au rang *p* d'une suite quelconque, $\left(a_n\right)$, écrite explicitement.
i est l'indice de sommation : il prend successivement toutes les valeurs allant de *m* à *p*. C'est une variable muette (on peut le remplacer par n'importe quelle lettre, la somme reste inchangée).

- La somme $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ comprend $n+1$ termes.
- La somme $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ comprend *n* termes.

b) Sommes de référence

$$1+2+\dots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

Pour $b \neq 1$, $$1+b+\dots+b^n=\sum_{k=0}^{n} b^k=\frac{b^{k+1}-1}{b-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1-b^{k+1}}{1-b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$$

c) Somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique *(2023)*

i. Suite arithmétique

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \ldots + u_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de S}) + (\text{dernier terme de } S)}{2}$$

ii. Suite géométrique

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1-b^n}{1-b} \quad \text{ou} \quad (\text{premier terme}) \times \frac{b^n - 1}{b-1}$$

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1-(\text{raison})}$$

d) Propriétés de la somme

i. Linéarité

Soient $n \in \mathbb{N}$, (a_n) et (b_n) deux suites et λ un réel,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i \ \text{(séparation)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i \ \text{(factorisation)}$$

ii. Relation de Chasles

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et p un entier tel que $1 < p < n$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$$

Conséquences importantes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i - a_0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i - a_0 - a_1$$

e) Sommes télescopiques

Il s'agit de sommes faisant intervenir la différence de deux termes consécutifs d'une suite, c'est à dire de sommes de la forme $\sum_{k=m}^{p} (a_{k+1} - a_k)$.

$$\sum_{k=m}^{p} (a_{k+1} - a_k) = a_{p+1} - a_m$$

En particulier : $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.

f) Décalage d'indice *(programme 2023)*

$$\sum_{k=a}^{k=b} u(k) = \sum_{k'=a+1}^{k'=b+1} u(k'-1) \ \text{en posant } k' = k+1 \ (\text{donc } k = k'-1).$$

III. <u>Généralités sur les probabilités et statistiques</u>

1. Définitions

- Une ***expérience aléatoire*** est une expérience pour laquelle l'ensemble des résultats est connu à l'avance. Cet ensemble de résultats est appelé univers. On le note : Ω.
  <u>Exemples</u> :
  - On lance une pièce de monnaie et on note la face visible. L'univers est constitué des résultats : pile ou face. On note $\Omega = \{P, F\}$.
  - On lance un dé cubique et on note le nombre qui apparaît sur la face supérieure. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé : éventualité.
- Un ***évènement*** est une partie de l'univers. Il peut être constitué de plusieurs éventualités.
  <u>Exemple</u> :
  Pour l'expérience du lancer d'un dé cubique l'événement A : « le résultat est pair » comprend trois éventualités. On note $A = \{2, 4, 6\}$.
- Un évènement élémentaire est un événement qui ne comprend qu'une éventualité
- Un évènement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible.
- Un évènement qui contient toutes les éventualités est l'événement certain.
- Deux événements sont ***incompatibles*** s'ils n'ont aucune éventualité commune : leur intersection est l'ensemble vide.
- Si A est un événement de l'univers Ω, l'événement ***contraire*** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué de toutes les éventualités de l'univers Ω n'appartenant pas à A.

2. Représentations des événements

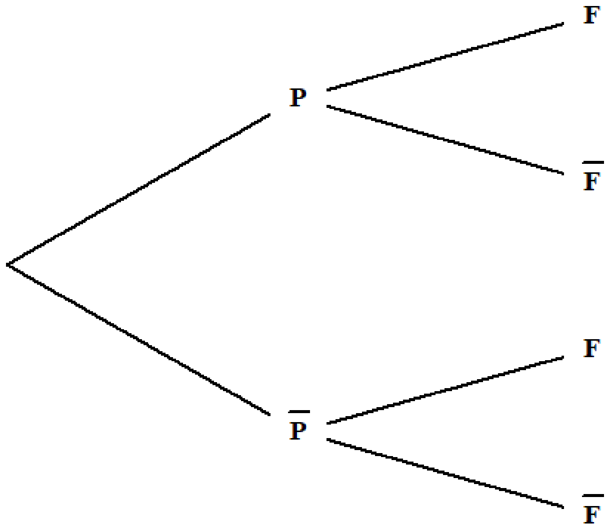
a) Tableau

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
Les différentes éventualités sont représentées par les cases du tableau ci-dessous.
L'univers est donc : {(P, P) ; (P, F) ; (F, P) ; (F, F)}.

1er lancer \ 2ème lancer	**P**	**F**
P	**(P, P)**	**(P, F)**
F	**(F, P)**	**(F, F)**

b) Arbres

Les 4 éventualités de l'exemple précédent peuvent être représentées à l'aide d'un arbre :



3. Premières formules

- Formule du crible :
  Pour tous événements *A* et *B* : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- Événements contraires
  Si A est un événement et $\overline{A}$ son événement contraire, alors $p(\overline{A})=1-p(A)$.
- Événements incompatibles
  Si A et B sont deux événements incompatibles $(A\cap B=\varnothing)$, alors :
  $p(A\cap B)=0$;
  $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- Équiprobabilité
  Si les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

4. Dénombrements

a) Tirages successifs avec ou sans remise

On utilise le **principe multiplicatif**.
Exemples :
Si on tire 4 boules successivement avec remise dans une urne en contenant 6, on a :
$6\times6\times6\times6=6^4=1296$ résultats possibles.
Si on tire 4 boules successivement sans remise dans une urne en contenant 6, on a :
$6\times5\times4\times3=360$ résultats possibles.

b) Tirages simultanés & nombres « *k* parmi *n* »

- Factorielle d'un entier naturel
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$.
Par convention, $0! = 1$ et $1! = 1$.
- Le nombre de tirages de k boules dans une urne parmi n est : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

Ce nombre se calcule à l'aide de la formule ou à l'aide du triangle de Pascal.
$\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

- Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

5. Probabilités conditionnelles

- **Probabilité conditionnelle :**

on appelle probabilité de B sachant A le réel $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

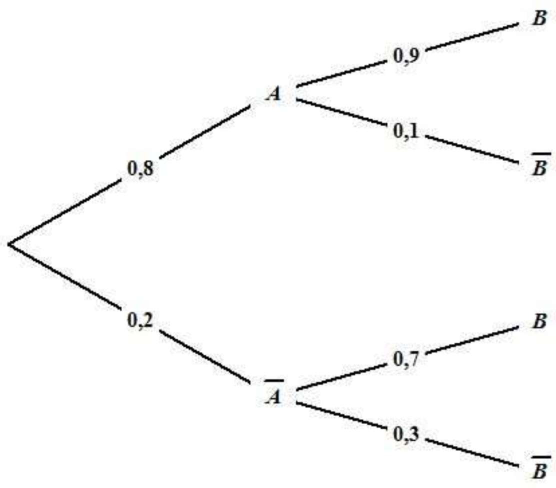
- **Événements indépendants :**
  - Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
  - Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A).$$

- **Formule des probabilités composées :**

La formule des probabilités conditionnelles permet d'écrire :
Soient A et B des événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$. Alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
Cette formule se généralise par la formule des probabilités composées :
Soient A_1, A_2 et A_3 des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$.
Alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$.
Soient A_1, A_2, … , A_m des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m) \neq 0$.
Alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times ... \times P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1}}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m)$.

- **Arbre à calculs et formule des probabilités totales**
  Exemple :



<u>Rédaction « type »</u>

- A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :
- $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

  $P(B) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,7$

  $P(B) = 0,72 + 0,14 = 0,86$

(on peut aussi noter $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$)

- **Système complet d'événements :**
  L'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements si :
  - tous les événements de E sont incompatibles deux à deux : pour $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$,
  - $\bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i = \Omega$.

  En particulier, l'ensemble $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

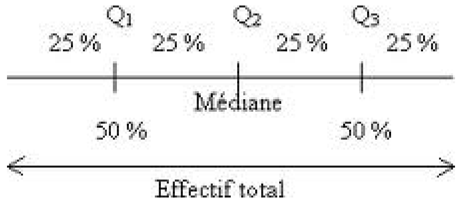
6. Statistiques *(hors programme 2023 sauf info)*

a) Statistiques univariées

- Caractéristiques de position :
  - ✓ Le mode est la valeur la plus fréquente, c'est à dire de plus grand effectif.
  - ✓ La moyenne arithmétique $\overline{x}$ d'une série statistique est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i \ .$$

- ✓ La médiane M d'une série est la valeur qui partage la série étudiée ordonnée en deux sous-groupes de même effectif chacun.
  - Si l'effectif est impair, la médiane est la valeur centrale.
  - Si l'effectif est pair, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales.
  - ✓ Le premier (troisième) quartile est le plus petit élément des valeurs des termes de la série tel qu'au moins 25 % (75 %) des données lui soient inférieures ou égales.



- Caractéristiques de dispersion :
  - ✓ L'étendue d'une série est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.
  - ✓ L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ et l'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

    Par définition, cet intervalle contient 50 % des mesures.
  - ✓ La variance d'une donnée statistique est :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{n_1 \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + ... + n_p \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{n_1 x_1^2 + ... + n_p x_p^2}{n} - \overline{x}^2$$

  - ✓ L'écart-type est alors : $\sigma = \sqrt{V}$.

b) Statistiques bivariées

- Principe : on s'intéresse au lien éventuel de deux caractères x_i et y_i .

- Nuage de points : le plan étant muni d'un repère, nous pouvons associer au couple (x_i ; y_i) de la série statistique double, le point M_i de coordonnées x_i et y_i.

- Point moyen : il s'agit du point de coordonnées $x_G = \overline{x}$ et $y_G = \overline{y}$.

- Méthode des moindres carrés
  - ✓ On appelle covariance de la série statistique à deux variables *x* et *y* le nombre réel :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$$

  - ✓ La droite de régression de *y* en *x* a pour équation :

$$y = a\,x + b \text{ où : } a = \frac{\sigma_{xy}}{\left(\sigma_x\right)^2} \text{ et } b = \overline{y} - a\,\overline{x}$$

  - ✓ La droite de régression passe par le point moyen.

✓ Le coefficient de corrélation linéaire est : $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

- ρ est un nombre sans dimension et on admet que $-1 \le \rho \le 1$.
- On estime que la corrélation est bonne lorsque $|\rho|$ est proche de 1.
- Ne pas confondre forte corrélation et relation de cause à effet.

IV. Matrices

1. Définition

Une matrice est un tableau de nombres.
Une matrice à *m* lignes et *n* colonnes est un tableau rectangulaire de $m \times n$ nombres, rangés ligne par ligne. Il y a *m* lignes, et dans chaque ligne *n* éléments.
Exemples :

Matrice de format $(3,2)$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, de format $(2,5)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, d'ordre 3 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice ligne de format $(1,5)$: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, matrice colonne de format $(3,1)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (la matrice est carrée)

Matrice diagonale d'ordre 3 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (la matrice est carrée)

Matrice triangulaire supérieure d'ordre 3 : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (la matrice est carrée)

Matrice triangulaire inférieure d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (la matrice est carrée)

Matrice identité d'ordre 2 : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'ordre 3 : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrices nulles (de différents formats) : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculs matriciels

a) Addition de matrices

Pour additionner deux matrices de même format, on additionne deux à deux les éléments correspondants.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ 3+5 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Remarque : $A + B = B + A$.

b) Multiplication d'une matrice par un réel

Pour multiplier une matrice par un réel, on multiplie tous les éléments de cette matrice par ce réel.

Exemple :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, alors $2A = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times3 & 2\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $-3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$.

On a aussi, par exemple : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Conséquence : pour soustraire deux matrices de même format, on soustrait deux à deux les éléments correspondants.

c) Multiplication de matrices

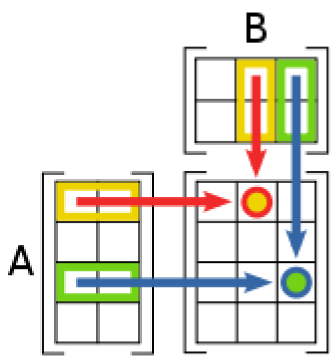
Le produit de deux matrices est une opération plus difficile.

Le produit de deux matrices ne peut se définir que si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice.

Pour obtenir l'élément placé, par exemple, à la 1re ligne, 2e colonne, il faut :

① considérer la 1re ligne de la première matrice

② considérer la 2e colonne de la deuxième matrice



③ effectuer la somme des produits des éléments correspondants deux à deux
Exemple :

$$\times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}\times 2 + \mathbf{2}\times 5 & \mathbf{1}\times(-1) + \mathbf{2}\times 3 \\ \mathbf{3}\times 2 + \mathbf{4}\times 5 & \mathbf{3}\times(-1) + \mathbf{4}\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 26 & 9 \end{pmatrix}$$

Attention, en général, $A \times B \neq B \times A$.
Soit A, I (matrice identité) et O (matrice nulle) trois matrices carrées de même ordre :

$$A \times I = I \times A = A \qquad \text{et} \qquad A \times O = O \times A = O$$

La division de matrices n'existe pas !

3. Écriture matricielle d'un système

- Le système d'équation suivant : $\begin{cases} a\,x + b\,y = e \\ c\,x + d\,y = f \end{cases}$ se traduit par l'écriture matricielle suivante :

  $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

  ou bien : $XA' = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}$

- Le système d'équation suivant : $\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = j \\ d\,x + e\,y + f\,z = k \\ g\,x + h\,y + i\,z = l \end{cases}$ se traduit par l'écriture matricielle :

  $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$

  ou bien : $XA' = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} j & k & l \end{pmatrix}$

Dans les deux situations précédentes, A et A' sont des matrices transposées.

4. Inverse d'une matrice

a) Définition

On dit que deux matrices carrées A et B sont inverses l'une de l'autre, ou que B est l'inverse de A si $A \times B = I$. On note alors $B = A^{-1}$.

b) Critères d'inversibilité

i. Cas d'une matrice 2×2

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad-bc\neq 0$, alors A est inversible.

ii. Cas d'une matrice triangulaire

Si les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire sont non nuls alors elle est inversible.

c) Calcul d'une matrice inverse

i. Cas des matrices 2×2

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad-bc\neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple : soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$1\times 1-1\times 2=1-2=-1\neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ii. Méthode par produit de deux matrices

1) Principe

Soient deux matrices P et Q telles que $P\times Q=k\,I$. Alors P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{k}Q$.

2) Exemple 1

On considère la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P^2=P\times P=I$. Donc P est inversible $P^{-1}=P$.

3) Exemple 2

On considère les matrices $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$P\times Q=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=6I$. Donc P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{6}Q=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

L'écriture $P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ suffit et est même conseillée !

4) Exemple 3

Deux matrices carrées A et B de même ordre vérifient : $A \times B = \frac{1}{4}I$.

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = 4B$.

5) Exemple 4

Deux matrices carrées C et D de même ordre vérifient : $C \times D = \frac{2}{3}I$.

On en déduit que C est inversible et que $C^{-1} = \frac{3}{2}B$.

6) Exemple 5

On considère une matrice N telle que $N^3 = O$ et la matrice $T = I + N$.

1. Calculer $(I+N)(I-N+N^2)$.

2. En déduire que T est inversible et déterminer T^{-1}.

Correction : **1.** $(I+N)(I-N+N^2) = I - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I + N^3 = I$.

2. On en déduit que T est inversible et que $T^{-1} = I - N + N^2$.

iii. Méthode par polynôme annulateur :

1) Notion de polynôme annulateur

Soit un polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.

P est un polynôme annulateur d'une matrice A si, en remplaçant X par A, et en remplaçant les valeurs constantes k par $k\,I$ (donc a_0 par $a_0 I$), on obtient la matrice nulle O.

On a donc : $a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = O$.

2) Exemple

Soit une matrice A donnée. On suppose qu'on a prouvé que $A^2 - A - 2I = 0$.

En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

$$A^2 - A - 2I = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad A^2 - A = 2I$$
$$\Leftrightarrow \quad A(A-I) = 2I \text{ (on reconnait la propriété du paragraphe précédent)}$$
$$\Leftrightarrow \quad A\left[\frac{1}{2}(A-I)\right] = I$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I)$ (qu'il reste à calculer...).

iv. Méthode du pivot de Gauss

1) Par matrice augmentée

Voir la vidéo dédiée : [lien Youtube]

Exemple : calculer la matrice inverse de $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\4&1&2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\4&1&2\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&3&-2\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\4&0&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow 2L_1-L_2\\L_3\leftarrow 4L_1-L_3\end{matrix}\right.$$

(on s'est servi de L_1, et on a fait apparaitre des 0 dans la matrice de gauche en première position des lignes 2 et 3)

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3\leftarrow 3L_2-L_3\end{matrix}\right.$$

(on s'est servi de L_2, et on a fait apparaitre un 0 dans la matrice de gauche en deuxième position de la ligne 3)

La réduite de Gauss est à pivots non nuls donc A est inversible.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow L_2-L_3\\ \\\end{matrix}\right.$$

(on s'est servi de L_3, et on a fait apparaitre un 0 dans la matrice de gauche en dernière position des lignes 1 et 2)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-L_2\\ \\ \\\end{matrix}\right.$$

(on s'est servi de L_2, et on a fait apparaitre un 0 dans la matrice de gauche en deuxième position de la ligne 1)

$$\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}1&-2&1\\0&2&-1\\-2&3&-1\end{matrix}\right)\begin{matrix}\\\\L_3\leftarrow -L_3\end{matrix}$$

(on ajuste les coefficient diagonaux de la matrice de gauche)

Finalement, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-1\\-2&3&-1\end{pmatrix}$.

2) Par résolution de système

Exemple : calculer la matrice inverse de $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

On résout le système : $(S)\quad\begin{cases}-x\phantom{{}-y}+2z=a & L_1\\ z=b & L_2\\ -y+z=c & L_3\end{cases}$

$$(S)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2z=a & L_1\leftarrow L_1\\ y=b-c & L_2\leftarrow L_2-L_3\\ z=b & L_3\leftrightarrow L_2\end{cases}$$

Le système ci-dessus est triangulaire. La matrice A est donc inversible.

$$(S)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a+2b & L_1\leftarrow 2L_3-L_1\\ y=b-c & L_2\leftarrow L_2\\ z=b & L_3\leftarrow L_3\end{cases}$$

On en déduit que $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

5. Calcul de la puissance *n*-ième d'une matrice

a) Principe

Étant donnée une matrice A, il s'agit de calculer A^n.

Dans le cas général, **on ne peut pas élever les éléments de A à la puissance n** :

Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $A^n\neq\begin{pmatrix}1&2^n\\3^n&4^n\end{pmatrix}$.

b) Cas d'une matrice diagonale

Si *D* est une matrice diagonale, D^n est obtenue en élevant ses éléments diagonaux à la puissance *n*.

Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$, alors $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,5^n \end{pmatrix}$.

c) Par récurrence directe

i.Principe

Situation relativement rare en concours. La réponse est donnée et il faut la démontrer par récurrence.

ii.Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que, pour tout *n* de $\mathbb{N}$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction :

★ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0(0-1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$. La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang *n*, c'est-à-dire que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n+n(n-1)}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

Remarques :

- cette formule aurait pu être conjecturée en calculant les premières puissances A^2, A^3...
- il est possible de calculer A^n à l'aide de la formule du binôme (voir paragraphe dédié).

d) À l'aide de suites

i. Principe

Situation totalement guidée par l'énoncé. Le calcul de A^n passe par l'étude de suites, éventuellement de référence.

ii. Exemple

Exercice corrigé :

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ où (a_n) est la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.

2. Calculer a_n. En déduire A^n.

Correction :

1. Démontrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A^1$. La propriété est vraie au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang *n*, c'est-à-dire que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

  Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

  $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2a_n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a_n) est une suite arithmético-géométrique (voir partie correspondante).

On trouve $a_n = 2^n - 1$ puis $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

e) À l'aide d'un polynôme annulateur

Il s'agit d'un cas particulier du paragraphe précédent. L'exercice est guidé.

L'idée consiste, par exemple, à écrire A^n sous la forme $A^n = u_n A + v_n I$ puis étudier les suites (u_n) et (v_n).

On note que l'on a : $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ car $A^0 = I = 0\times A + 1\times I$ puis $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$ car $A^1 = A = 1\times A + 0\times I$.

f) À l'aide d'une matrice nilpotente et de la formule du binôme de Newton

i.Principe :

On dispose :

- d'une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale
- on a prouvé que $N = A - I$ est une matrice nilpotente (ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang, en général, $N^3 = O$).

→ Les matrices A et I commutent, on calcule alors A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

ii.Exemple 1

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $n \geq 2$, calculer A^n en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme. (On sait que $N^3 = O$).

<u>Éléments de correction</u> :

- $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.
- pour $k \geq 3$, $N^k = N^{k-3}\times N^3 = N^{k-3}\times O = O$
- $A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times I^{n-k} = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii.Exemple 2

On considère les matrices carrées A, I, O et B définies par :

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\quad,\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=A-3I\,.$$

1. a) Calculer B, B^2, B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n\geq 2$:

$A^n=3^n\left(I+\frac{n}{3}B+\frac{n(n-1)}{18}B^2\right)$. Est-ce encore vrai pour $n\in\{0,1\}$?

Correction :

1. a) $B=A-3I=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&0\\-1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

$$B^2=B\times B=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&-2&-2\end{pmatrix}.$$

$$B^3=B^2\times B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O.$$

b) On en déduit : $B^k=B^{k-3}\times B^3=B^{k-3}\times O=O$ pour $k\geq 3$.

2. $B=A-3I\Leftrightarrow A=3I+B$.

D'après la formule du binôme, pour n supérieur ou égal à 2 :

$$A^n=(3I+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(3I)^{n-k}\times B^k,$$

$\Leftrightarrow\quad A^n=\binom{n}{0}\times(3I)^{n-0}\times B^0+\binom{n}{1}\times(3I)^{n-1}\times B^1+\binom{n}{2}\times(3I)^{n-2}\times B^2+O$ car $B^k=O$ si $k\geq 3$,

$$\Leftrightarrow\quad A^n=1\times(3I)^n\times B^0+n\times(3I)^{n-1}\times B^1+\frac{n(n-1)}{2}\times(3I)^{n-2}\times B^2,$$

$$\Leftrightarrow\quad A^n=3^nI+n3^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}B^2,$$

$$\Leftrightarrow\quad A^n=3^nI+n\frac{3^n}{3}B+\frac{n(n-1)}{2}\frac{3^n}{3^2}B^2,$$

$$\Leftrightarrow\quad A^n=3^n\left(I+\frac{n}{3}B+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{9}B^2\right),$$

$$\Leftrightarrow \qquad A^n = 3^n\left(I+\frac{n}{3}B+\frac{n(n-1)}{18}B^2\right).$$

Pour $n=0$: $3^0\left(I+\frac{0}{3}B+\frac{0(0-1)}{18}B^2\right)=3^0 I = I = A^0$.

La formule est encore vraie pour $n=0$.

Pour $n=1$: $3^1\left(I+\frac{1}{3}B+\frac{1(1-1)}{18}B^2\right)=3^1\left(I+\frac{1}{3}B+\frac{0}{18}B^2\right)=3\left(I+\frac{1}{3}B\right)=3I+B=A=A^1$.

La formule est encore vraie pour $n=1$.

g) Par diagonalisation

Le principe est le suivant : on dispose

- de deux matrices A et P (inversible).
- on a calculé P^{-1} puis on a prouvé que $D=P^{-1}AP$ est diagonale.
- on connait donc D^n (voir paragraphe b).
- Notons que $D=P^{-1}AP$ s'écrit $A=PDP^{-1}$.

On démontre alors par récurrence que $A^n=PD^nP^{-1}$:

- $PD^0P^{-1}=P\times I\times P^{-1}=P\times P^{-1}=I=A^0$.
  La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang *n*, c'est-à-dire que $A^n=PD^nP^{-1}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
  $A^{n+1}=A^n\times A=PD^nP^{-1}\times PDP^{-1}=PD^n\times\left(P^{-1}\times P\right)\times DP^{-1}$.
  $A^{n+1}=PD^n\times I\times DP^{-1}=P\times\left(D^n\times D\right)\times P^{-1}=P\times D^{n+1}\times P^{-1}$.
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Il ne « reste » alors plus qu'à effectuer le calcul : $P\times D^n\times P^{-1}$ pour trouver A^n …

6. Réduction des matrices carrées

a) Principe

L'objectif de cette partie est de détailler le processus de diagonalisation vu en **II.4.g**.

b) Matrices carrées diagonalisables

Une matrice carrée *A* est **diagonalisable** s'il existe une matrice *D*, diagonale, et une matrice carrée *P*, inversible, telles que $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Remarque : $A=P\cdot D\cdot P^{-1}\Leftrightarrow A\cdot P=P\cdot D\Leftrightarrow D=P^{-1}\cdot A\cdot P$.

c) Valeur propre et vecteur(s) propre(s) d'une matrice

Soient A une matrice carrée et X une matrice colonne (vecteur) non nulle. S'il existe un réel λ tel que $AX = \lambda X$, on dit que λ est **valeur propre de la matrice *A*** et que X est **un vecteur propre de *A*** associé à la valeur propre λ.

Exercice corrigé :

Soient les matrices A et P carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère les matrices $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que X, Y et Z sont des vecteurs propres de A et préciser leurs valeurs propres associées.

Correction :

$$A \times X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2 \times X.$$

X est vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre 1/2.

$$A \times Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times Y.$$

Y est vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre 1.

$$A \times Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2Z.$$

Z est vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre 2.

d) Construction de *D* et *P*

La matrice D est une matrice diagonale construite à l'aide des valeurs propres

La matrice P est obtenue par juxtaposition de vecteurs propres associés à chaque valeur propre (en conservant l'ordre).

e) Détermination des valeurs propres de *A* à l'aide d'un polynôme annulateur de *A*

- Si P est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de P.

$\Rightarrow$ Si l'on dispose d'un polynôme annulateur de A, on recherche les valeurs propres de A parmi les racines de ce polynôme.

- $X^2-(a+d)X+(ad-bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Pour déterminer les racines d'un polynôme P du troisième degré, on cherche une racine évidente *a* puis soit on effectue la division euclidienne de P par $x-a$, soit on applique l'algorithme de Hörner.

Exemple : Déterminer les racines du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{P}(x)=2x^3-x^2-7x+6$.

———

$\mathrm{P}(1)=2\times1^3-1^2-7\times1+6=0$, donc 1 est racine (évidente).

<u>Méthode 1</u> : on effectue la division euclidienne de P par $x-1$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^3 & -x^2 & -7x+6 & x-1 \\ \cline{4-4}
2x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{1-3}
 & x^2 & -7x+6 & 2x^2+x-6 \\
 & x^2 & -x & \\ \cline{2-3}
 & & -6x+6 & \\
 & & -6x+6 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

<u>Méthode 2</u> : on applique l'algorithme de Hörner.

	2	− 1	− 7	6
1		2	1	− 6
	2	1	− 6	0

On en déduit que $\mathrm{P}(x)=(x-1)\left(2x^2+x-6\right)$.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $2x^2+x-6$ à l'aide du discriminant (on trouve $\Delta=49$ puis –2 et 3/2.

Les trois racines de P sont –2, 1 et 3/2.

f) Calcul d'un vecteur propre associé à une valeur propre connue

Si λ est valeur propre de la matrice *A*, alors les vecteurs propres de *A* associés à λ sont les solutions du système d'équation : $(A-\lambda I)X=0$.

Cette propriété découle naturellement de l'écriture $AX=\lambda X$.

Ainsi, si l'on connait les valeurs propres d'une matrice, <u>il est possible de calculer des vecteurs propres associés</u> à chacune d'elles puis de déterminer *D* et *P*…

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de *A*

2. Déterminer les vecteurs propres associés.

3. En déduire une matrice *D* et une matrice *P*, inversible, telles que $A=PDP^{-1}$

———

1. $X^2-(a+d)X+(ad-bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donc

X^2-3X+2 est un polynôme annulateur de A.

Les valeurs propres possibles de *A* sont les racines de X^2-3X+2, donc 1 et 2 (faire Δ).

2. On résout les systèmes $(A-I)X=0$ puis $(A-2I)X=0$ où *X* est le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$(A-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,5x+0,5y \\ 0,5x+0,5y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0,5x+0,5y=0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$$

En prenant $x=1$, on trouve qu'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vérification : $A\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($AX=\lambda X$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de 1).

$$(A-2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -0,5x+0,5y=0 \Leftrightarrow y=x.$$

En prenant $x=1$, on trouve qu'un vecteur propre associé à la valeur propre 2 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérification : $A\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($AX=\lambda X$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de 2).

3. Construction de *D* et *P*

Les valeurs propres donnent, par exemple, $D=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathit{2} \end{pmatrix}$ et les vecteurs propres permettent d'obtenir $P=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathit{1} \\ \mathbf{-1} & \mathit{1} \end{pmatrix}$ (respecter l'ordre des éléments).

7. Marches aléatoires (chaînes de Markov)

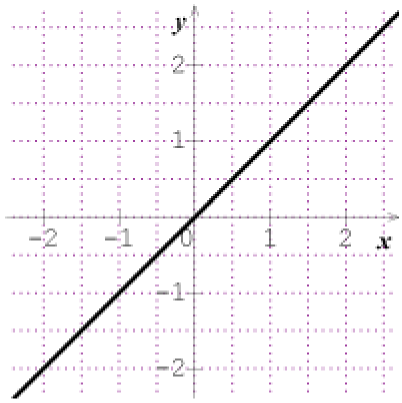
- En mathématiques, en économie, en informatique ou en physique théorique, une marche au hasard est un modèle mathématique d'un système dynamique décrivant un changement d'état à chaque étape.
- Si on représente le système par un graphe (un triangle, par exemple), cela revient, à chaque étape (à chaque *pas*), à changer de sommet en parcourant les arêtes selon un éventail de possibilités, chacune d'elles étant associée à une probabilité.
- Ces pas aléatoires sont de plus totalement décorrélés les uns des autres ; cette dernière propriété, fondamentale, qui confère à la marche ce que l'on appelle le caractère de Markov, signifie intuitivement qu'à chaque instant, le futur du système dépend de son état présent, mais pas de son passé, même le plus proche. Autrement dit, le système « perd la mémoire » à mesure qu'il évolue dans le temps…
- En général, en concours, on passe par une interprétation matricielle du type $X_{n+1} = AX_n$ ce qui ramène, après une démonstration par récurrence, à $X_n = A^n X_0$ ou $A^{n-1}X_1$, donc au calcul de la puissance nième de *A*.
- `grand(n,"markov",A',X0)` renvoie *n* états successifs de la chaine de Markov de matrice de transition *A* et d'état initial X_0 (état non affiché et non compté dans les *n* états successifs par Scilab).

V. Études de fonctions

1. Fonctions de référence

a) La fonction identité : $x \mapsto x$

- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$.
- Dans un repère, la représentation graphique de *f* est la droite d'équation $y = x$.



- $\boxed{\textbf{Signe de } x \textbf{ :}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$signe.de.x$		$-$	0	$+$	

- Variation : *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Les fonctions affines : $x \mapsto ax+b$

- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax+b$.

  a est le coefficient directeur, b est l'ordonnée à l'origine.
- Dans un repère, la représentation graphique de *f* est la droite d'équation $y = ax+b$.
- **Signe de $ax+b$:**

  Si $a>0$, $\quad ax+b \geq 0$

  $\Leftrightarrow \quad ax \geq -b$

  $\Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

  Si $a<0$, $\quad ax+b \geq 0$

  $\Leftrightarrow \quad ax \geq -b$

  $\Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{-b}{a}$

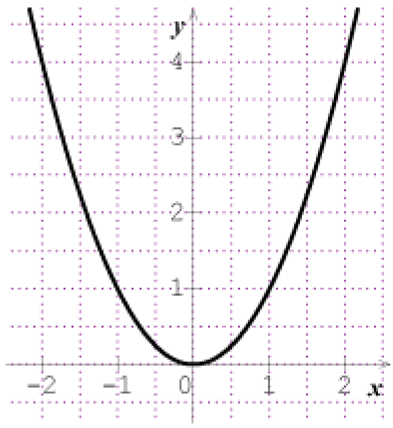
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

- Variations :

  Si $a>0$, *f* est croissante sur $\mathbb{R}$, si $a<0$ *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction carrée : $x \mapsto x^2$

- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
- Dans un repère, la représentation graphique de *f* est la parabole d'équation $y = x^2$.



- **Signe de x^2 :**

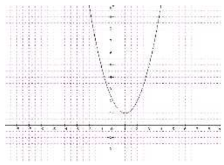
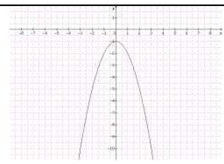
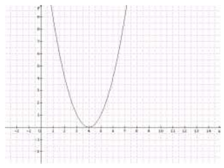
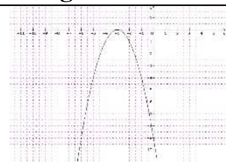
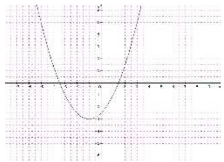
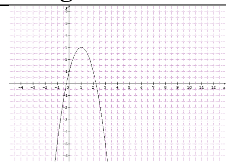
  Un carré est toujours positif. Plus précisément :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$signe.de.x^2$	$+$	0	$+$

- Variations : *f* est décroissante sur $]-\infty;0]$ puis *f* est croissante sur $[0;+\infty[$.

d) Les fonctions trinômes du second degré : $x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$

- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\,x^2 + bx + c$.
- Cas général : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

	Résolution de l'équation	Factorisation de ax^2+bx+c	Signe et représentation graphique	
			$a>0$	$a<0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation.		
			ax^2+bx+c est du signe de a	
$\Delta = 0$	Une racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$a\left(x-x_0\right)^2$		
			ax^2+bx+c est du signe de a	
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$		
			ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines	

- cas où $c=0$: $f(x) = a\,x^2 + bx = x(ax+b)$ (on a factorisé par *x*)

  0 et $-b/a$ sont racines « évidentes ».

  Exemple : $x^2+2x = x(x+2)$. 0 et -2 sont racines.
- cas où on reconnait $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

  Exemples : $x^2-9 = (x-3)(x+3)$. 3 et -3 sont racines.

  $x^2-2 = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont racines.

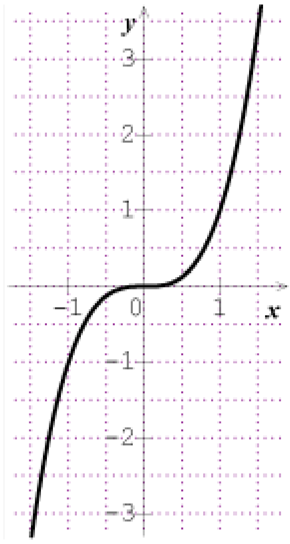
  $3x^2-1 = \left(\sqrt{3}\,x-1\right)\left(\sqrt{3}\,x+1\right)$. $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$ sont racines.
- cas où on reconnait $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ ou $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$.

  Exemple : $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. -1 est la seule racine (double).

e) La fonction cube : $x \mapsto x^3$

- *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

- Dans un repère, la représentation graphique de *f* est :



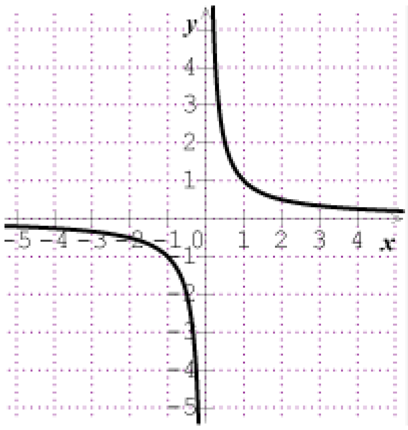
- Signe de x^3 :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$signe.de.x^3$	$-$ 0 $+$

- Variation : *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

f) La fonction inverse : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

- *f* est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Dans un repère, la représentation graphique de *f* est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



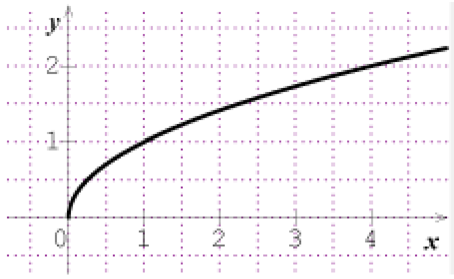
- **Signe de $\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$:**

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$signe.de.\frac{1}{x}$	$-$ ‖ $+$

- Variations : *f* est décroissante sur $]-\infty;0[$ et *f* est décroissante sur $]0;+\infty[$.

g) La fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$

- f est définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.
- Dans un repère, la représentation graphique de f est :



- Signe de $\sqrt{x}$:
  Une racine carrée est toujours positive :

x	$0 \qquad +\infty$
$signe.de.\sqrt{x}$	$0 \quad +$

- Variation : f est croissante sur $[0;+\infty[$.

h) La fonction logarithme népérien : $x \mapsto \ln x$

- La fonction logarithme népérien est l'unique fonction qui a pour dérivée $x \to \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note ln.

- Conséquences immédiates :
  - ✓ ln est définie sur $]0\,;+\infty[$. Elle n'est pas définie en 0, ni pour les nombres négatifs.
  - ✓ $\ln 1 = 0$
  - ✓ ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

- $\boldsymbol{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

- **Formules**

  $\ln ab = \ln a + \ln b$ $\qquad$ $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ $\qquad$ $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $\qquad$ $\ln a^n = n \ln a$

- $\boxed{\textbf{Signe de } \boldsymbol{\ln x} \textbf{ :}}$

x	$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$
$signe.de.\ln(x)$	$- \qquad 0 \qquad +$

- **Variations**

  f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

- **Limites**

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale d'équation $x=0$).

  Exemple 1 : déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - \ln x\right)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par somme de limites,} \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\ln x\right)=+\infty\end{array}$$

  (on a utilisé : $x^2 - \ln x = x^2 + \left(-\ln x\right)$)

  Exemple 2 : déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x}$.

  $$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par produit de limites,} \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty\end{array}$$

  (on a utilisé : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$)

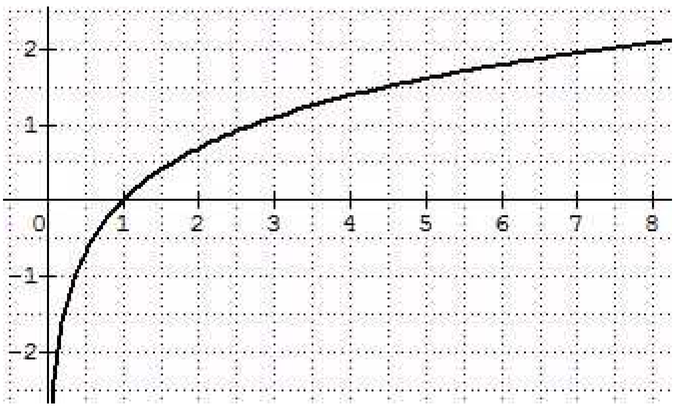
- **Croissances comparées**

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$: à l'infini, toute puissance de x l'emporte sur ln.

  Exemple 3 : déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - \ln x\right)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to +\infty} -\ln x = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par croissances comparées,} \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-\ln x\right)=+\infty\end{array}$$

  (on a utilisé : $x^2 - \ln x = x^2 + \left(-\ln x\right)$)



i) La fonction exponentielle : $x \mapsto e^x$

- La fonction ln est strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$. Alors pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;+\infty[$, l'équation $\ln y = x$ admet une unique solution dans $]0\,,+\infty[$: e^x.
  La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction réciproque de ln.

- Quelques conséquences immédiates :
  ✓ exp est définie sur $\mathbb{R}$.
  ✓ $e^0 = 1$; $e^1 = e$.
  ✓ Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$.
  ✓ Pour tout réel $x > 0$ $e^{\ln x} = x$.

- $\left(e^x\right)' = e^x$ $\quad\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$ $\quad\left(e^{ax}\right)' = a\,e^{ax}$ $\quad\left(e^u\right)' = u'e^u$.

- **Formules**

  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\quad \left(e^a\right)^n = e^{an}$

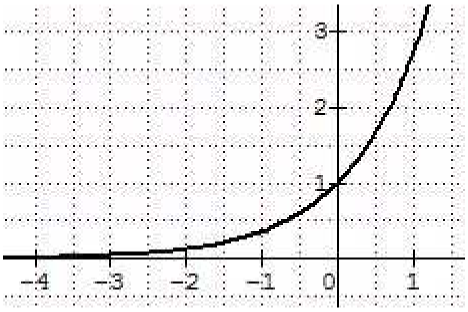
- **Signe de e^x :**
  Une exponentielle est toujours strictement positive :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$signe.de.\exp(x)$	$+$

- **Variations**
  exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Limites**
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$)

- **Croissances comparées**
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$: à l'infini, exp l'emporte sur toute puissance de x.

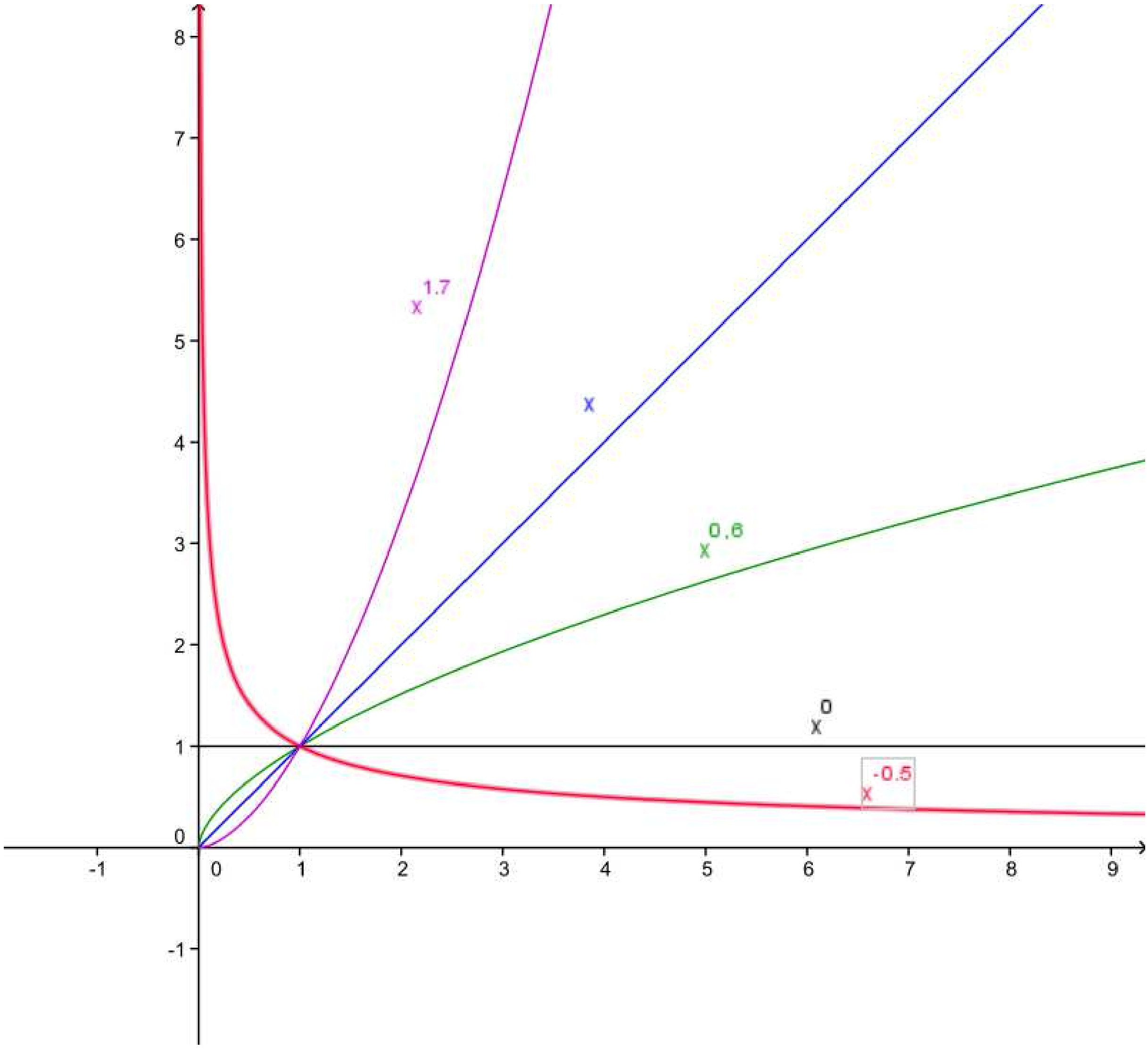


j) Les fonctions puissances d'exposant réel : $x \mapsto x^a$

f_a est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_a(x) = x^a = e^{a \ln x}$.

Remarque : sur $]0\,;+\infty[$, $f_{1/2}(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

Valeur de a	Prolongeable en 0	Dérivable en 0	Sens de variation	Comportement à l'infini	Convexité
$a < 0$	non	non	décroissante	asymptote d:y = 0	convexe
$a = 0$	oui	oui	constante	confondue avec d:y=1	droite
$0 < a < 1$	oui	non	croissante	branche parabolique d'axe Ox	concave
$a = 1$	oui	oui	croissante	confondue avec d:y=x	droite
$a > 1$	oui	oui	croissante	branche parabolique d'axe Oy	convexe



k) La fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$

- La valeur absolue d'un réel x est le nombre noté $|x|$ qui est égal au nombre x si x est positif, et au nombre $-x$ si x est négatif.

  Autrement dit, $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

- Exemples :

  $|5| = 5$ car $5 > 0$.

  $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$.

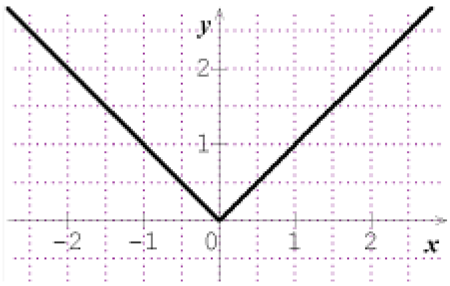
  $|2-t| = \begin{cases} 2-t \text{ si } 2-t \geq 0, \text{c'est-à-dire si } t \leq 2 \text{ ;} \\ t-2 \text{ si } 2-t \leq 0, \text{c'est-à-dire si } t \geq 2. \end{cases}$

- Remarques :
  - Une valeur absolue est toujours positive : pour tout réel x, $|x| \geq 0$.
  - Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout réel x, $|x| = |-x|$.

- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- La distance entre deux réels x et y est la distance entre les points d'abscisses x et y sur la droite réelle munie d'un repère $(O\ ;\ \vec{i})$. On la note $d(x\ ;\ y)$.

  Pour tous réels x et y, on a : $|x| = d(x\ ;\ 0)$ et $|x-y| = d(x\ ;\ y)$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$.
- Dans un repère, la représentation graphique de f est :



- Signe de $|x|$:

  Une valeur absolue est toujours positive. Plus précisément :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$signe.de.\lvert x\rvert$	$+$	0	$+$

- Variations : f est décroissante sur $]-\infty;0]$ puis f est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. Ensemble de définition

a) Trait de fraction

Un dénominateur de peut jamais être égal à 0.

b) Logarithme népérien

Ce qu'il y a sous un logarithme népérien est toujours strictement supérieur à 0.

c) Racine carrée

Ce qu'il y a sous le symbole $\sqrt{\ }$ est toujours supérieur ou égal à 0.

3. Limites

a) Limites de fonctions usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$

b) Interprétations graphiques : asymptotes horizontales et verticales

- Si f a pour limite ℓ, en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$, est asymptote horizontale à la courbe de f.
- Si f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), en a^+ ou en a^-, on dit que la droite d'équation $x = a$, est asymptote verticale à la courbe de f.

c) « Point – point – accolade » (opérations sur les limites)

i. par somme

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par somme de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

ii. par différence (préférer par somme de l'opposé)

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par somme de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\end{array} \quad \text{(on a utilisé : } f(x) = \dfrac{4}{x} + \left(-2x^2\right)\text{)}$$

iii. par produit

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = x\left(4 + \dfrac{2}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4 + \dfrac{2}{x} = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par produit de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

iv. par quotient (éventuellement par produit de l'inverse)

Exemple : déterminer la limite en 0^+ de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par quotient de limites,} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) == -\infty\end{array}$$

v. par composée

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)^3$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=\mathbf{2} \\ \bullet \lim\limits_{X\to\mathbf{2}} X^3=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par composée de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=8\end{array}$$

d) Formes indéterminées

Les 4 formes indéterminées sont :

$\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

Remarque : $\frac{0}{\infty}=0$ et $\frac{\pm\infty}{0^{\pm}}=\pm\infty$ (signe par règle des signes)

e) Autres méthodes

- par inverse de limites (par exemple $\frac{1}{x+\ln(x)}$ ou $\frac{x}{\mathrm{e}^x}$)
- regroupement de trois termes en deux termes
- « point – point – accolade – point – accolade »

f) Contournement de formes indéterminées

i. Règle du monôme de plus haut degré en <u>$\pm\infty$</u> pour les <u>polynômes</u> ou les <u>fractions rationnelles</u>.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+2x-5=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x}{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+4}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2}=0$.

ii. Croissance comparée

En cas de forme indéterminée : $\ln x \ll x^{\alpha} \ll \mathrm{e}^x$.

En particulier : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^{\alpha}}=+\infty$,

et aussi : $\lim\limits_{x\to0} x^{\alpha}\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^x=0$.

iii. Factorisation

Exemples : $x\ln x - x = x(\ln x - 1)$ en $+\infty$,

Ou : $\dfrac{e^x}{x} - x = x\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right)$ en $+\infty$.

iv. Développement

Exemple : $\dfrac{1}{x}(x + \ln x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

v. Autres transformations

Exemple : $\dfrac{e^x}{3e^x + 2} = \dfrac{e^x}{3e^x + 2} \times \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = \dfrac{1}{3 + 2e^{-x}}$ en $+\infty$.

g) Théorèmes de convergence

i. Théorème d'encadrement (théorème des "gendarmes")

f, *g*, *h* désignent des fonctions, ℓ et ℓ' deux réels, et *a* un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $g \le f \le h$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Cas particulier : si $\forall x$, $|f(x) - \ell| \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Ce résultat découle de la "<u>compatibilité avec l'ordre</u>" :

f et *g* désignent des fonctions, ℓ et ℓ' deux réels, et *a* un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Soient *f* et *g* deux fonctions telles que $f(x) \le g(x)$ sur un intervalle et soient $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \le \ell'$.

ii. Théorème de comparaison

f et *g* désignent des fonctions et *a* un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème de majoration :

$$\text{Si } f \le g \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \text{, alors } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty .$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si } f \le g \text{ et } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{, alors } \lim_{x \to a} g(x) = +\infty .$$

iii. Théorème de limite monotone

$-\infty \le a < b \le +\infty$.

Si *f* est croissante et majorée sur l'intervalle $]a, b[$, alors *f* admet une limite finie en *b*.

Si *f* est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors *f* admet une limite finie en *a*.

Si *f* est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors *f* admet pour limite $+\infty$ en *b*.

Si *f* est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors *f* admet pour limite $-\infty$ en *a*.

h) Limite d'une fonction avec dénominateur en une valeur interdite

i. Principe

- Sauf cas exceptionnel, la limite sera ∞.
- On étudie le signe du dénominateur.
- On applique la règle des signes pour savoir si le résultat est $+\infty$ ou $-\infty$ (soit par calcul direct, soit après un « point-point-accolade », par quotient).

ii. Exemple 1

Déterminons $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2x^2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x^2}{x-1}$.

On détermine d'abord le signe du dénominateur :

$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, d'où :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

Dès lors,

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2x^2}{x-1} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x^2}{x-1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$.

iii. Exemple 2

Déterminons $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln x}$.

On détermine d'abord le signe du dénominateur : le signe de $\ln x$ est un signe de référence du cours.

x	0 1 $+\infty$
$signe.de.\ln(x)$	$-$ 0 $+$

Dès lors,

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

4. Continuité

a) Continuité en un point, sur un intervalle

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle *I*.

- On dit que la fonction *f* est continue en un réel *a* de *I* si :

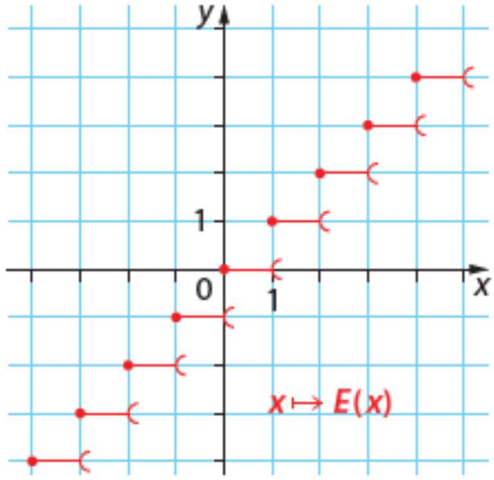
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ ou bien } \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

- Si *f* est une fonction définie par morceaux et que *a* est l'abscisse d'un point de raccordement, *f* est continue en *a* si : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

- On dit que la fonction f est continue sur I si f est continue en tout réel a de I.
- Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f sur I peut être tracée sans lever le crayon.

b) Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions polynômes, rationnelles, ln, exp, racine ou encore valeur absolue sont continues sur leurs ensembles de définition.
La fonction partie entière est un exemple de fonction discontinue sur tous les points d'abscisse entière.



c) Théorèmes généraux sur les fonctions continues

- la somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- le quotient de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas en a.
- si une fonction f est continue en a et une fonction g est continue en $f(a)$ alors la fonction composée $g(f(a))$ est elle aussi continue en a.

d) Étude de la continuité : exemple

Exercice

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x - 1$ sur $]-\infty ; 1[$ <u>et</u> $f(x) = x^2 - 2x + 1 + \ln(x)$ sur $[1 ; +\infty[$.

Analyse

f est bien définie sur $\mathbb{R}$. On compte deux morceaux et une frontière.

① Une phrase de continuité pour chaque morceau sur l'intervalle ouvert correspondant.
② Une étude locale à la frontière (le point d'abscisse $x = 1$).

Correction

f est continue sur] – ∞ ; 1[comme fonction affine.

f est continue sur]1 ; + ∞[comme somme de fonctions continues sur]1 ; + ∞[.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x-1=0\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=1^2-2\times1+1+\ln(1)=1-2+1+0=0\end{array}\right\}\text{donc } f \text{ est continue en 1.}$$

e) Applications de la continuité

i. Image d'un intervalle par une fonction continue

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Ce résultat, admis, porte le nom de théorème des valeurs intermédiaires.

ii. Fonction continue strictement monotone

- Une fonction continue strictement monotone est appelée bijection.
- Une fonction bijective admet une fonction réciproque.

  Exemple : la fonction ln est bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$ qui est la fonction exponentielle.

  On a alors : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\ln e^x = x$ et, pour tout $x>0$, $e^{\ln x}=x$.

  Remarque : les courbes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
- Application à l'équation $f(x)=k$ (théorème de la bijection) : voir paragraphe dédié.

5. Dérivabilité

a) Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle *I*.

- On dit que la fonction *f* est dérivable en un réel *a* de *I* si :

  $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe ou bien } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existe.}$$

  Dans ce cas, cette limite est notée *f* ' (*a*).
- On dit que la fonction *f* est dérivable sur *I* si *f* est dérivable en tout réel *a* de *I*.
- Graphiquement, la dérivabilité d'une fonction *f* sur un intervalle *I* se traduit soit par l'existence d'une seule tangente en un point non verticale.
- **Théorème** : toute fonction *f* dérivable sur un intervalle *I* est aussi continue sur *I*. La propriété réciproque est <u>fausse</u>.

b) Dérivation des fonctions usuelles

Les fonctions polynômes, rationnelles, ln et exp, sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

La fonction racine carrée est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ (mais pas en 0).

En effet, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

c) Théorèmes généraux sur les fonctions dérivables

- la somme de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a.
- le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a.
- le quotient de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas en a.
- si une fonction f est dérivable en a et une fonction g est dérivable en $f(a)$ alors la fonction composée $g(f(a))$ est elle aussi dérivable en a.

d) Étude de la dérivabilité : exemple

Exercice

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

Analyse

f est bien définie sur $\left[0;+\infty\right[$.

① Une phrase générale de dérivabilité sur $\left]0;+\infty\right[$.

② Une étude locale en 0.

Correction

f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ comme produit de fonctions dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$. Donc f est dérivable en 0.

Finalement, f est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ (0 inclus).

e) Application de la dérivabilité en un point aux limites

$$\text{Si } f \text{ est dérivable en } a,\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

Cette propriété permet de « contourner » des formes *a priori* indéterminées.

- Exemple 1 :

Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

$f(x) = e^x$ est dérivable en 0. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = f'(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ car $f'(x) = e^x$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

Remarque : $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{0}{\approx} 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \underset{0}{\approx} x \Leftrightarrow e^x \underset{0}{\approx} 1 + x$.

On retrouve l'approximation affine en 0 de exp.

- Exemple 2 :

Calcul de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

$f(x) = \ln x$ est dérivable en 1. Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = f'(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$ car $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.}$$

Remarque : $\dfrac{\ln x}{x - 1} \underset{1}{\approx} 1 \Leftrightarrow \ln x \underset{1}{\approx} x - 1$.

On retrouve l'approximation affine en 1 de ln.

6. Dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	Forme de la fonction	Dérivée
k constante	0	$u+v$	$u'+v'$
$mx+p$	m	$u-v$	$u'-v'$
x	1	$k\times u$, k constante	$k\times u'$
x^2	$2x$	$u\times v$	$u'v+v'u$
x^n	nx^{n-1}	u^2	$2u'u$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$	$\frac{k}{v}$	$-\frac{kv'}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{k}{u^n}$	$-n\frac{ku'}{u^{n+1}}$
e^x	e^x	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
e^{-x}	$-\mathrm{e}^{-x}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^{2x}	$2\mathrm{e}^{2x}$	e^u	$u'\mathrm{e}^u$
e^{ax+b}	$a\mathrm{e}^{ax+b}$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	Astuce : $\ln\left(\frac{u}{v}\right)$	$\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$
$\ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$	Bonus : $\mathrm{e}^{u\times v}$	$(u'v+v'u)\mathrm{e}^{u\times v}$

7. Signe de la dérivée

a) Inéquation

i. Principe

On cherche les x pour lesquels $f'(x)\geq 0$ (ce qui correspond au + du tableau de signe).

Revoir si besoin les techniques de manipulation d'inégalités dans le paragraphe 13 ci-dessous.

ii. Les fonctions affines

Signe de $ax+b$:

Si $a>0$, $\quad ax+b\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad ax\geq -b$

$\Leftrightarrow \quad x\geq \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

Si $a<0$, $\quad ax+b\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad ax\geq -b$

$\Leftrightarrow \quad x\leq \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

iii. Certaines expressions contenant un logarithme

Exemple : déterminons le signe de $6\ln x-3$.

$6\ln x-3\geq 0$,

$\Leftrightarrow \quad 6\ln x\geq 3$,

$\Leftrightarrow \quad \ln x\geq \frac{3}{6}$,

$\Leftrightarrow \quad \ln x\geq \frac{1}{2}$,

$\Leftrightarrow \quad x\geq \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{\mathrm{e}}$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$6\ln x-3$	$-$	0	$+$

iv. Certaines expressions contenant une exponentielle

Exemple : déterminons le signe de $\mathrm{e}^{-x}-1$.

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x}-1\geq 0$,

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x}\geq 1$,

$\Leftrightarrow \quad -x\geq \ln 1$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$,

$\Leftrightarrow \quad -x\geq 0$,

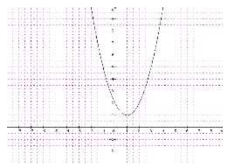
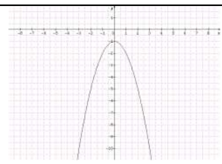
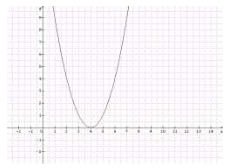
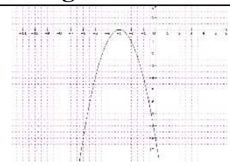
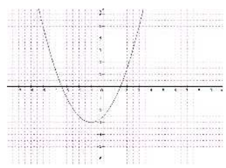
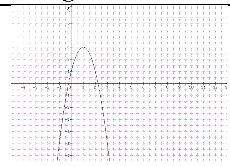
$\Leftrightarrow \quad x\leq 0$.

On en déduit :

x	$+\infty$	0	$+\infty$
$e^{-x}-1$	$+$	0	$-$

b) Delta

Cas général : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Résolution de l'équation</td><td rowspan="2">Factorisation de ax^2+bx+c</td><td colspan="2">Signe et représentation graphique</td></tr>
<tr><td>$a>0$</td><td>$a<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta<0$</td><td rowspan="2">Pas de solution</td><td rowspan="2">Pas de factorisation.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">ax^2+bx+c est du signe de a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta=0$</td><td rowspan="2">Une racine double :
$x_0=\frac{-b}{2a}$</td><td rowspan="2">$a\left(x-x_0\right)^2$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">ax^2+bx+c est du signe de a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta>0$</td><td rowspan="2">Deux racines distinctes :
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td rowspan="2">$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines</td></tr>
</table>

c) Identités remarquables ou factorisation par *x*

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+c$.

- cas où on reconnait $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

  Exemples : $x^2-9=(x-3)(x+3)$. 3 et -3 sont racines.

  $x^2-2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont racines.

  $3x^2-1=\left(\sqrt{3}\,x-1\right)\left(\sqrt{3}\,x+1\right)$. $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$ sont racines.

- cas où on reconnait $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ou $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

  Exemple : $x^2+2x+1=(x+1)^2$. -1 est la seule racine (double).

- cas où $c=0$: $f(x)=ax^2+bx=x(ax+b)$ (on a factorisé par *x*)

  0 et $-b/a$ sont racines « évidentes ».

  Exemple : $x^2+2x=x(x+2)$. 0 et -2 sont racines.

d) Appartenance de x à un intervalle

Si on sait par exemple que $x>0$, cela facilite grandement les études de signe.

Autre exemple : si $x\in\,]0;1[$ alors nécessairement $1-x>0$.

e) Somme de termes positifs ou négatifs

- La somme de deux termes positifs est positive.
- La somme de deux termes négatifs est négative.
- On ne peut pas conclure « directement » sur la somme de deux termes de signe contraire.
- Tableau de signe pour une ***somme*** :

Somme	+	–
+	+	?
–	?	–

f) Signe de fonction de référence

- **Signe de x :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$signe.de.x$		$-$	0	$+$	

- **Signe de x^2 :**

Un carré est toujours positif. Plus précisément :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$signe.de.x^2$		$+$	0	$+$	

- Signe de x^3 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$signe.de.x^3$		$-$	0	$+$	

- **Signe de $\frac{1}{x}$:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$signe.de.\frac{1}{x}$		$-$	||	$+$	

- Signe de $\sqrt{x}$:

Une racine carrée est toujours positive :

x	0		$+\infty$
$signe.de.\sqrt{x}$	0	$+$	

- **Signe de $\ln x$:**

x	0		1		$+\infty$
$signe.de.\ln(x)$		$-$	0	$+$	

- **Signe de e^x :**

  Une exponentielle est toujours strictement positive :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$signe.de.\exp(x)$	$+$

g) Factorisation / réduction au même dénominateur puis signe de chacun des facteurs

i. Principe

Après factorisation ou réduction au même dénominateur, le signe d'un produit ou d'un quotient se déduit de la règle des signes après étude du signe de chacun des facteurs.

Produit ou quotient	+	−
+	+	−
−	−	+

ii. Exemple 1

Étudier le signe de $\dfrac{5x(x-2)}{-4x+1}$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{4}\right[\cup\left]\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

Analyse :

$\dfrac{5x(x-2)}{-4x+1}$ est composé de quatre facteurs : 5, qui est une constante, x, qui est une fonction de référence et $x-2$ et $-4x+1$ qui sont des fonctions affines.

Correction :

Étudions le signe de chacun des quatre facteurs :

- $5>0$.
- x est une fonction de référence de signe connu :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$signe.de.x$	$-$	0	$+$

- $\qquad x-2\geq 0$

  $\Leftrightarrow \quad x\geq 2$

- $\qquad -4x+1\geq 0$

  $\Leftrightarrow \quad -4x\geq -1$

  $\Leftrightarrow \quad x\leq \dfrac{1}{4}$

Regroupons toutes les informations dans un grand tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
5		$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-4x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$signe.de.\frac{5x(x-2)}{-4x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

iii. Exemple 2

Étudier le signe de $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Correction :

- $e^x > 0$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ (fonction de référence).
- $x^2 > 0$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ (fonction de référence).

Donc $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ est du signe de $x-1$.

- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

On en déduit le signe de $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ puis le tableau des variations de *f* sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$signe.de.\frac{e^x(x-1)}{x^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

h) Utilisation d'un tableau de variation (et éventuellement du théorème de la bijection)

i. Principe

Le signe d'une fonction peut être déterminé par lecture ou utilisation de son tableau de variation obtenu après étude de ses variations (par le signe de la dérivée en général).

ii. Exemple 1

Étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x^2-4$.

Analyse :

g est un polynôme de degré 3. Il n'y a pas d'aide pour une factorisation éventuelle.
On étudie donc ses variations.

Correction :

- $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

  $g'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 2.

  $g'(x)$ est donc du signe de 3 à l'extérieur des racines.

- On en déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	-4	↘	-9	↗	$+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

  $g(0)=0^3-3\times0^2-4=-4$ et $g(2)=2^3-3\times2^2-4=8-3\times4-4=8-12-4=-9$.

- Sur $]-\infty\,;2]$:

  -1 est maximum, donc l'équation $g(x)=0$ ne possède pas de solution sur $]-\infty\,;2]$.

- Sur $]2\,;+\infty[$:

  - g est continue sur $]2\,;+\infty[$
  - g est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$
  - $0\in g(]2\,;+\infty[)=]-9\,;+\infty[$

  D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α sur $]2\,;+\infty[$.

- On en déduit le tableau du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

iii. Exemple 2

Démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln x \leq x-1$.

Analyse :

Dans un premier temps, on pense immédiatement à étudier le signe de la différence pour montrer que : $x-1-\ln x \geq 0$.

Nous allons étudier les variations de la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-1-\ln x$.

Correction :

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

- $x \geq 0$ car $x \in]0;+\infty[$. $f'(x)$ est donc du signe de $x-1$.
- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

On en déduit les variations de *f* sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$signe.de.f'(x)$		$-$	0	$+$	
$variations.de.f$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0} -\ln x=+\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par somme,} \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty\end{array}.$$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x-1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\ln x=-\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par croissance comparée,} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty\end{array}.$$

Enfin, $f(1)=1-1-\ln 1=0$.

D'après le tableau des variations de *f*, 0 est minimum sur $]0;+\infty[$.

Par suite, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1$.

Remarque :

Ce résultat peut se retrouver à l'aide de la convexité (voir chapitre VII, paragraphe dédié).

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à ln est : $y=x-1$ et comme ln est concave, elle se situe au-dessous de ses tangentes. $\ln x \leq x-1$.

8. Variations d'une fonction

a) Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

b) Détermination des variations

La technique la plus courante pour étudier les variations d'une fonction f est la suivante :

- On dérive la fonction $f(x)$.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On en déduit les variations de f :

Si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle.
Si $f'(x) \leq 0$ sur un intervalle, alors f est décroissante sur cet intervalle.

c) Maximum, minimum (extremum)

- f est une fonction définie sur un intervalle I et x_0 désigne un réel de I.
  Dire que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I signifie que : pour tout x de I, $f(x) \leq f(x_0)$.
  On dit que f est majorée sur I.
  Dire que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I signifie que : pour tout x de I, $f(x) \geq f(x_0)$.
  On dit que f est minorée sur I.
  Une fonction à la fois majorée et minorée est dite bornée.
- Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

VI. Probabilités discrètes

1. Lois de probabilités discrètes

a) Généralités

i. Variables aléatoires

Soit Ω un univers et P une probabilité. Une v.a.r. X définie sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit une variable aléatoire X sur un univers fini Ω, on pose $X(\Omega)=\{x_1, \dots, x_n\}$.

Alors les ensembles $(X=x_k)_{k=1\dots n}$ sont un système complet d'événements de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n}(X=x_k)$$

Il s'agit du système complet d'événements associé à la variable aléatoire X.

Ce système complet est intéressant car il découpe l'univers Ω en région où X est constante. En fait il découpe Ω selon la valeur de X.

ii. Loi de probabilité

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est présenter l'ensemble des valeurs x_i prises par X et calculer les probabilités $P[X=x_i]$ correspondantes.

Cette présentation se fait généralement à l'aide d'un tableau ou à l'aide d'une formule.

b) Fonction de répartition

- La fonction de répartition d'une v.a. X est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $F(x)=p(X\le x)$.
- On a donc : $p(X\le a)=F(a)$, $p(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$ et $p(X\ge a)=1-F(a)$

c) Variable aléatoires discrètes finies

- **Espérance :**

$$\boxed{E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i=\sum_i x_i p[X=x_i]}$$

- **Variance :**

$$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+\dots+p_n(x_n-E(X))^2=\sum_{i=1}^{i=n}p_i(x_i-E(X))^2.$$

Formule de Koenig-Huygens : on démontre que $\boxed{V(X)=E(X^2)-(E(X))^2}$.

Ainsi, $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i^2-(E(X))^2$.

Remarque : $E(X^2)=V(X)+(E(X))^2$

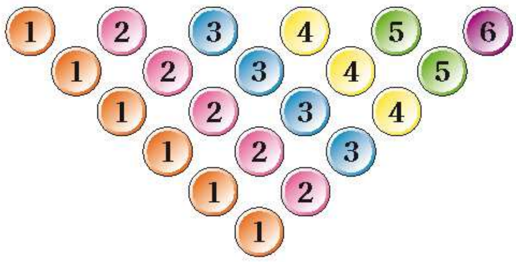
- **Écart type :**

  Écart type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exercice corrigé :

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.

On pioche au hasard un jeton du sac.



Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton.

On définit la variable aléatoire *X* qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

1. Déterminer $X(\Omega)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de *X*.

3. Calculer $E(X)$.

4. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

Correction :

1. Chaque jeton rapporte 1 à 6 euros et la mise est de 3 euros. Donc $X(\Omega)=[\![-2,3]\!]$.

2. Il y a 6 jetons numérotés 1 sur les 21. Donc $p(X=-2)=\dfrac{6}{21}$.

On procède de la même façon pour les autres valeurs pour obtenir la loi de probabilité :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	$\dfrac{6}{21}$	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{4}{21}$	$\dfrac{3}{21}$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{1}{21}$

3. $E(X)=\dfrac{6}{21}\times(-2)+\dfrac{5}{21}\times(-1)+\dfrac{4}{21}\times 0+\dfrac{3}{21}\times 1+\dfrac{2}{21}\times 2+\dfrac{1}{21}\times 3=\dfrac{-7}{21}=-\dfrac{1}{3}$.

4. $E(X^2)=\dfrac{6}{21}\times(-2)^2+\dfrac{5}{21}\times(-1)^2+\dfrac{4}{21}\times 0^2+\dfrac{3}{21}\times 1^2+\dfrac{2}{21}\times 2^2+\dfrac{1}{21}\times 3^2$

$E(X^2)=\dfrac{6}{21}\times 4+\dfrac{5}{21}\times 1+\dfrac{4}{21}\times 0+\dfrac{3}{21}\times 1+\dfrac{2}{21}\times 4+\dfrac{1}{21}\times 9=\dfrac{49}{21}=\dfrac{7\times 7}{7\times 3}=\dfrac{7}{3}$

On en déduit :

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{7}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{3}-\frac{1}{9}=\frac{21-1}{9}=\frac{20}{9}.$$

Finalement, $\sigma(X)=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{\sqrt{20}}{3}$.

d) Variable aléatoires discrètes infinies

- **Espérance :**

$$E(X)=\sum_{k=0\,\mathrm{ou}\,1}^{+\infty} kp_k$$

- **Variance :**

$$V(X)=\sum_{k=0\,\mathrm{ou}\,1}^{+\infty}(k-E(X))^2\,p_k \quad \text{ou} \quad V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{k=0\,\mathrm{ou}\,1}^{+\infty}k^2p_k-(E(X))^2$$

- **Sommes et séries :**

✓ La manière usuelle de définir ***la série*** $\Sigma=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$, c'est de considérer la suite des sommes partielles $S_n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$ puis d'étudier sa limite lorsque n tend vers l'infini. Si cette limite existe et est finie, on dit que Σ converge et la limite est considérée comme étant « la valeur » de Σ.

✓ Séries géométriques et dérivées :
convergence si $|q|<1$, divergent sinon

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}} \quad ; \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}n\,q^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}}$$

✓ Série exponentielle ***(hors programme 2023)*** :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x} \text{ pour tout réel } x.$$

✓ Rappels de sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n-a_0$$

somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n}(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_0$

e) Propriétés de l'espérance

Par linéarité de l'espérance :

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

f) Propriétés de la variance

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

Si X et Y sont *indépendantes* : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ et $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$.

Remarque : dans le cas général, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$.

2. Lois de probabilités usuelles discrètes (« cartes d'identité »)

a) Loi certaine

Soient $a\in\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire certaine égale à a.

① Contexte :
Expérience « aléatoire » pour laquelle il y a une seule valeur possible : a.

② Valeurs prises par X :
$X(\Omega)=\{a\}$

③ Loi de probabilité :
$P[X=a]=1$

④ Espérance :
$E(X)=a$

⑤ Variance :
$V(X)=0$

⑥ Simulation en informatique :
-

b) Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

On note $X\hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

① Contextes :
- Lancer d'un dé équilibré à n faces,
- rang de première apparition dans le cas de tirages successifs de n boules sans remise.

② Valeurs prises par X :
$X(\Omega)=[\![1,n]\!]$

③ Loi de probabilité :

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P[X=k]=\dfrac{1}{n}$

④ Espérance :

$E(X)=\dfrac{n+1}{2}$

⑤ Variance :

$V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

⑥ Simulation en informatique :

`import numpy.random as rd`

Simulation 1 : utilisation de `rd.randint`

`rd.randint(1,n+1)` renvoie à un réel issu de la simulation de la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

`rd.randint(1,n+1,m)` renvoie à m réels issus de m simulations de la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

`rd.randint (1,n+1,[m1,m2])` renvoie à une matrice de taille $m_1 \times m_2$ de réels issus de simulations de la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Simulation 2 : utilisation de `rd.random`

Exemple pour une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$

```
n,r=4,1
while rd.random()>1/n:
    r+=1
    n+=-1
print(r)
```

c) Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

① Contexte : lancer d'une pièce « truquée » avec obtention d'un 1 ou d'un 0.
On réalise une épreuve de Bernoulli (expérience aléatoire à deux issues possibles appelées succès et échec) :

- on associe au succès la valeur 1 et à l'échec la valeur 0,
- la probabilité du succès est égale à p.

② Valeurs prises par X :

$X(\Omega)=\{0\ ;\ 1\}$

③ Loi de probabilité :

$$P[X=1]=p \qquad \text{et} \qquad P[X=0]=1-p\ :$$

x_i	0	1

p_i	$1-p$	p

④ Espérance :

$E(X)=p$

⑤ Variance :

$V(X)=p(1-p)$

⑥ Simulation en informatique :

```
import numpy.random as rd
```

Simulation 1 : utilisation de `rd.binomial`

`rd.binomial(1,p)` renvoie à un réel (0 ou 1) représentant une simulation de la loi de Bernoulli de paramètre *p*.

`rd.binomial(1,p,m)` renvoie à *m* réels issus de *m* simulations de la loi de Bernoulli de paramètre *p*.

`rd.binomial(1,p,[m1,m2])` renvoie à une matrice de taille $m_1 \times m_2$ de réels issus de simulations de la loi de Bernoulli de paramètre *p*.

Simulation 2 : utilisation de `rd.random`

```
if rd.random()<p : a=1       #p est à renseigner
else : a=0
print(a)
```

Simulation 3 : utilisation de `rd.randint`

Exemple pour une loi de Bernoulli de paramètre 1/4

```
if rd.randint(1,5)==1 : a=1
else : a=0
print(a)
```

d) Loi binomiale

Soit *X* une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

① Contexte/rédaction :

On effectue *n* épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles (de Bernoulli, donc) :

- succès : (à rédiger selon l'énoncé), avec la probabilité *p* ;
- échec : (à rédiger selon l'énoncé), avec la probabilité $1-p$.

X **<u>compte le nombre de succès</u>**.

X suit donc la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

② Valeurs prises par *X* :

$X(\Omega)=[\![0,n]\!]$

③ Loi de probabilité :

$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

④ Espérance :

$E(X) = n\,p$

⑤ Variance :

$V(X) = n\,p(1-p)$

⑥ Simulation en informatique :

`import numpy.random as rd`

Simulation 1 : utilisation de `rd.binomial`

`rd.binomial(n,p)` renvoie à un réel issu de la simulation d'une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

`rd.binomial(n,p,m)` renvoie à *m* réels issus de *m* simulations de la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

`rd.binomial(n,p,[m1,m2])` renvoie à une matrice de taille $m_1 \times m_2$ de réels issus de simulations de la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

Simulation 2 : utilisation de `rd.random`

```
a=0
for k in range(n+1) :            #n est à renseigner
     if rd.random()<p : a+=1     #p est à renseigner
print(a)
```

Exercice corrigé :

On lance dix fois un dé à six faces bien équilibré. Soit *X* la variable aléatoire qui associe le nombre de fois que le 5 est obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de *X*.

<u>Rédaction « type »</u>

On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le 5 est obtenu, avec la probabilité 1/6 ;
- échec : le 5 n'est pas obtenu, avec la probabilité 5/6.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et 1/6.

Dès lors, dans cet exemple :

- $X(\Omega) = [\![0\,,10]\!]$
- Pour tout entier $k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$
- $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$
- $V(X) = n \times p \times (1-p) = \frac{5}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$

e) Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

① Contexte/rédaction :

On effectue n épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles (de Bernoulli, donc) :

- succès : (à rédiger selon l'énoncé), avec la probabilité p ;
- échec : (à rédiger selon l'énoncé), avec la probabilité $1-p$.

X **<u>est le rang d'attente du premier succès</u>**.

X suit donc la loi géométrique de paramètre p.

② Valeurs prises par X :

$X(\Omega)=\mathbb{N}^*$

③ Loi de probabilité :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X=k)=p(1-p)^{k-1}$

④ Espérance :

$E(X)=\dfrac{1}{p}$

⑤ Variance :

$V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

⑥ Simulation en informatique :

`import numpy.random as rd`

Simulation 1 : utilisation de `rd.geometric`

`rd.geometric(p)` renvoie à un réel issu de la simulation d'une loi géométrique de paramètre p.

`rd.geometric (p,m)` renvoie à m réels issus de m simulations de la loi géométrique de paramètre p.

`rd.geometric (n,p,[m1,m2])` renvoie à une matrice de taille $m_1 \times m_2$ de réels issus de simulations de la loi géométrique de paramètre p.

Simulation 2 : utilisation de `rd.random`

```
r=1
while rd.random()>p : r+=1          #p est à renseigner
print(r)
```

Exercice corrigé :

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. On note Y le rang de du premier pile obtenu. Quelle est la loi suivie par Y ?

Rédaction « type »

On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : pile est obtenu, avec la probabilité 0,3 ;
- échec : face est obtenu, avec la probabilité 0,7.

Y est le temps d'attente du premier succès.
Y suit donc la loi géométrique de paramètre 0,3.

Dès lors, dans cet exemple :

- $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$
- Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=k)=0,7^{k-1}\times 0,3$
- $E(Y)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{0,3}=\dfrac{10}{3}$
- $V(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{0,7}{0,09}=\dfrac{70}{9}$

f) Loi de Poisson (Siméon Denis Poisson 1781-1840)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$ de paramètre $m>0$.

On note $X\hookrightarrow\mathcal{P}(m)$.

① Contexte :
Pas de contexte à proprement parlé, mais la loi de Poisson est une loi de phénomènes rares.

② Valeurs prises par X :
$X(\Omega)=\mathbb{N}$

③ Loi de probabilité :
$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(X=k)=\mathrm{e}^{-m}\frac{m^k}{k!}$$
Le calcul des probabilités se fait en général par utilisation de valeurs données.

④ Espérance :
$E(X)=m$

⑤ Variance :
$V(X)=m$

⑥ Simulation en informatique :

```
import numpy.random as rd
```

Utilisation de `rd.poisson`

`rd.poisson(lam)` renvoie à un réel issu de la simulation d'une loi de Poisson de paramètre λ.

`rd.poisson(lam,n)` renvoie à n réels issus de n simulations de la loi de Poisson de paramètre λ.

`rd.poisson(lam,[n1,n2])` renvoie à une matrice de taille $n_1 \times n_2$ de réels issus de simulations de la loi de Poisson de paramètre λ.

3. Loi conjointe et couple de variables aléatoires

a) Loi conjointe

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On appelle loi conjointe la loi de probabilité du couple (X,Y).

Exemple :

X \ Y	**0**	**1**	**2**	**Loi de X**
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de Y	0,2	0,3	0,5	1

- Les lois obtenues par sommation des lignes et des colonnes sont appelées lois marginales. Il s'agit en fait de la loi de X et de celle de Y.
- On a $P([X=1]\cap[Y=2])=0,3$ et on peut vérifier que la somme de toutes les probabilités est égale à 1.

b) Indépendance de variables aléatoires conjointes

On dit que X et Y sont **indépendantes** si
$\forall (x_i, y_j) \in \{0,1\}\times\{0,1,2\}, P([X=x_i]\cap[Y=y_j]) = P([X=x_i])\times P([Y=y_j])$.

Exemple :

X \ Y	$Y=0$	$Y=1$	Loi de X
$X=0$	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
$X=1$	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
Loi de Y	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

$P([X=0])\times P([Y=0]) = \frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \frac{16}{49}$. Or $P([X=0]\cap[Y=0]) = \frac{16}{49}$.
On vérifie les trois autres cas… X et Y sont indépendantes.
(ce n'était pas le cas dans l'exemple d'avant).

c) Covariance

- On appelle **covariance** de *X* et *Y* et on note $\text{cov}(X, Y)$ le réel $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ avec $E(XY) = \sum x_i \times y_j \times P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ et où $E(X)$ et $E(Y)$ sont les espérances respectives de *X* et *Y*.

- Si $\text{cov}(X,Y) \neq 0$ alors *X* et *Y* ne sont pas indépendantes (réciproque fausse).
- Dans le cas général, $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$.
- $\text{cov}(aX+b, cY+d) = ac\,\text{cov}(X,Y)$.

Exemple :

$X \backslash Y$	**0**	**1**	**2**	**Loi de *X***
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de *Y*	0,2	0,3	0,5	1

$E(X) = 0\times 0,4 + 1\times 0,6 = 0,6$.

$E(Y) = 0\times 0,2 + 1\times 0,3 + 2\times 0,5 = 1,3$.

$E(XY) = 0\times 0\times 0,1 + 0\times 1\times 0,1 + 0\times 2\times 0,2 + 1\times 0\times 0,1 + 1\times 1\times 0,2 + 1\times 2\times 0,3 = 0,8$.

$\text{cov}(X,Y) = 0,8 - 0,6\times 1,3 = 0,8 - 0,78 = 0,02$

d) Coefficient de corrélation

- Le coefficient de corrélation linéaire entre *X* et *Y* est $\rho(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
- On a :
  - $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
  - $\rho(X,Y) = 1$ si, et seulement si, $Y = aX + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
  - $\rho(X,Y) = -1$ si, et seulement si, $Y = aX + b$ avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
  - Si *X* et *Y* sont indépendantes, alors $\rho(X,Y) = 0$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$, alors $\rho(\lambda X, \mu Y) = \rho(X,Y)$.

VII. Questions classiques sur les fonctions

1. Équation de la tangente

On dispose : d'une fonction $f(x)$, de sa dérivée $f'(x)$ et d'une abscisse *a*.

- On calcule $f(a)$.
- On calcule $f'(a)$.
- Une équation de la tangente (phrase de l'énoncé…) est : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

2. Asymptote oblique

a) Montrer qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ à la courbe d'une fonction *f*

On dispose : d'une fonction $f(x)$ et d'une droite d'équation $y = ax + b$.

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On montre que $\lim\limits_{+\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$ ou $\lim\limits_{-\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$ selon le cas.

b) Deviner une équation d'une asymptote oblique

Soient *f* et φ deux fonctions telle que $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ à la courbe de *f*.

3. Position relative d'une courbe et d'une droite

On dispose : d'une fonction $f(x)$ dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée et d'une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On détermine le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

  Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$.

Remarque : cette méthode se généralise à l'étude de la position relative de deux courbes quelconques.

4. Résolution de l'équation $f(x) = k$

a) Par calcul direct

i. Cas « simples »

Exemples :

$2x + 5 = 4$; $\dfrac{2x+1}{x-3} = 4$; $3\ln x - 5 = 7$; $\mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$.

ii. Équation du second degré ou se ramenant à du second degré

Exemples :

$x^2 + x - 2 = 0$; $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$; $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$.

iii. Équation du troisième degré

Pour déterminer les racines d'un polynôme P du troisième degré, on cherche une racine évidente a puis soit on effectue la division euclidienne de P par $x-a$, soit on applique l'algorithme de Hörner.

Exemple : Déterminer les racines du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{P}(x)=2x^3-x^2-7x+6$.

$\mathrm{P}(1)=2\times1^3-1^2-7\times1+6=0$, donc 1 est racine (évidente).

<u>Méthode 1</u> : on effectue la division euclidienne de P par $x-1$.

$$
\begin{array}{cccc|l}
2x^3 & -x^2 & -7x & +6 & x-1 \\
\cline{5-5}
2x^3 & -2x^2 & & & \\
\cline{1-4}
 & x^2 & -7x & +6 & 2x^2+x-6 \\
 & x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & & -6x & +6 & \\
 & & -6x & +6 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

<u>Méthode 2</u> : on applique l'algorithme de Hörner.

	2	− 1	− 7	6
1		2	1	− 6
	2	1	− 6	0

On en déduit que $\mathrm{P}(x)=(x-1)\left(2x^2+x-6\right)$.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $2x^2+x-6$ à l'aide du discriminant (on trouve $\Delta=49$ puis –2 et 3/2.

Les trois racines de P sont –2, 1 et 3/2.

b) Astuce : se ramener si besoin à $g(x)=0$

On pose : $g(x)=f(x)-k$.

$$f(x)=k \quad\Leftrightarrow\quad f(x)-k=0 \quad\Leftrightarrow\quad g(x)=0.$$

c) Existence d'une solution α **: théorème de la bijection**

Pour montrer que l'équation $f(x)=c$ admet une unique solution sur un intervalle *I* :

① On précise que *f* est continue sur *I*.

② On précise que *f* est strictement monotone sur *I*.

③ On précise que $c\in f(I)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur *I*.

Remarque : notion de bijection
Si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [*a*, *b*] et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre [*a*, *b*] et l'intervalle fermé dont les bornes sont *f*(*a*) et *f*(*b*).

d) Approximation d'une solution : montrer que $\alpha \in]m, M[$

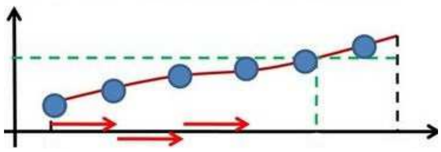
① On calcule *f* (*m*).
② On calcule *f* (*M*).
③ On vérifie que *f* (α) (c'est à dire *k*) est compris entre *f* (*m*) et *f* (*M*).

e) Algorithmes d'approximation de α

i. Algorithme de balayage

On considère une fonction strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $0 \in f([a, b])$

- Principe :

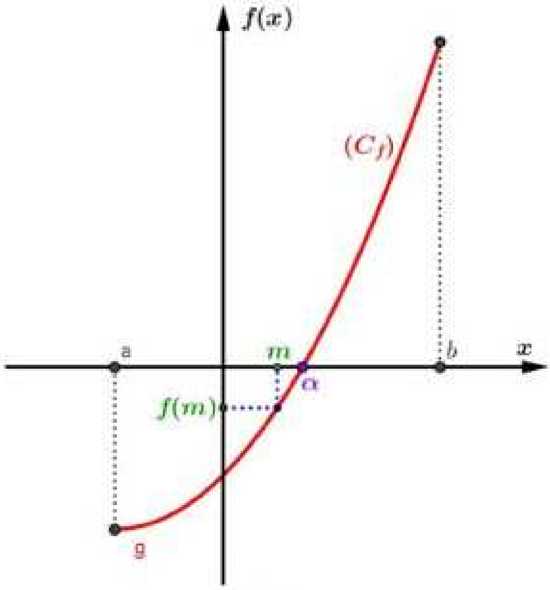


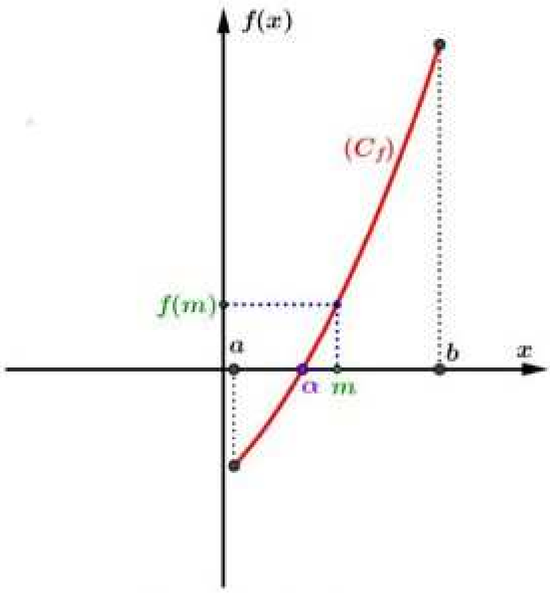
On part de $f(a)$ et on incrémente *a* d'un nombre, appelé *pas*, qui correspond à la précision souhaitée (par exemple à 0,01 près) et on calcule $f(a + pas)$ tant que (boucle <u>while</u>, donc) $f(a + pas)$ est du même signe que $f(a)$. Le programme s'arrête dès que $f(a + pas)$ est du signe contraire de $f(a)$ (ce qui correspond, mathématiquement, à $f(a + pas) \times f(a) < 0$). α est compris entre *a* et $a + pas$.

- ```
  Définir fonction f
  Entrer a
  Entrer pas
  Tant que f (a + pas) × f (a) > 0 faire a = a + pas
  Afficher a et a + pas
  ```
  ```

ii. Algorithme de dichotomie

- Principe :





On teste $f(m)$ où $m = (b + a)/2$

Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, m remplace a, sinon m remplace b.

La taille de l'intervalle $]a\ ,\ b[$ est divisée par 2 autant que nécessaire tant que l'écart entre a et b (donc $b - a$) est plus grande que la précision souhaitée.

-
```
Définir fonction f
Entrer a
Entrer b
Entrer p #précision souhaitée
Tant que b − a > p
     Si f ((a + b) / 2) × f (a) > 0
          Faire a = (a + b) / 2
     Sinon
          Faire b = (a + b) / 2
Afficher a et b
```

5. Démontrer une inégalité, un encadrement

a) Addition et soustraction

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne modifie pas le sens de l'égalité.

b) Multiplication et division

Multiplier ou diviser par un même nombre ***positif*** les deux membres d'une inégalité ne modifie pas le sens de l'égalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre ***négatif*** les deux membres d'une inégalité inverse le sens de l'égalité.

c) Utilisation d'une fonction monotone

Une fonction ***croissante*** sur un intervalle *I*, conserve l'ordre sur *I* : les réels de l'intervalle *I* et leurs images par *f* sont rangés dans le même ordre.
Si *f* est croissante sur $[a;b]$: $a \leq b$,

$$\Leftrightarrow \quad f(a) \leq f(b).$$

Si *f* est croissante sur $[a;c]$: $a \leq b \leq c$,

$$\Leftrightarrow \quad f(a) \leq f(b) \leq f(c).$$

Une fonction ***décroissante*** sur un intervalle *I*, modifie l'ordre sur *I* : les réels de l'intervalle *I* et leurs images par *f* sont rangés dans l'ordre inverse.
Si *f* est décroissante sur $[a;b]$: $a \leq b$,

$$\Leftrightarrow \quad f(b) \leq f(a) \text{ ou } f(a) \geq f(b).$$

Si *f* est décroissante sur $[a;c]$: $a \leq b \leq c$,

$$\Leftrightarrow \quad f(c) \leq f(b) \leq f(a) \text{ ou } f(a) \geq f(b) \geq f(c).$$

d) Signe de la différence

Pour démontrer que $a \leq b$, on peut démontrer que le signe de la différence $b-a$ est positif :

$$a \leq b \Leftrightarrow b-a \geq 0.$$

6. Parité

a) Fonction paire

- Une fonction *f*, définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est paire lorsque :
  - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
  - pour tout *x* de $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$
- La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit, en particulier, et si elles existent, que les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont égales.
- Les fonctions carrée et valeur absolue sont paires.

b) Fonction impaire

- Une fonction *f*, définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est impaire lorsque :
  - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
  - pour tout *x* de $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$
- La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère. On en déduit, en particulier, et si elles existent, que les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont opposées.
- Les fonctions inverse, cube et identité sont impaires.

c) Étude de la parité

① L'ensemble de définition doit être centré en 0.

② On calcule $f(-x)$:

- Si $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- Si $f(-x) = -f(x)$: la fonction est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Autrement, la fonction n'est ni paire, ni impaire.

7. Convexité

a) Étude de la convexité d'une fonction deux fois dérivable

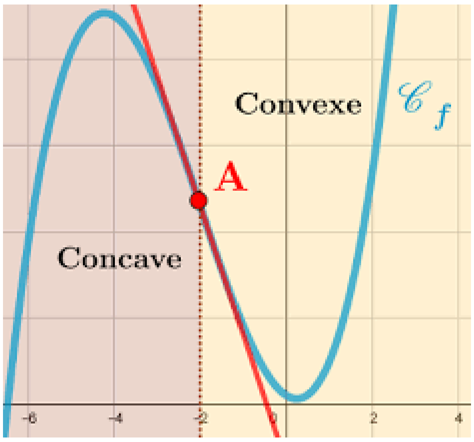
On calcule $f''(x)$.

- Si $f''(x) \geq 0$ sur un intervalle, alors *f* est convexe sur cet intervalle ;
- Si $f''(x) \leq 0$ sur un intervalle, alors *f* est concave sur cet intervalle.

Exemples : la fonction carrée et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine et la fonction logarithme népérien sont concaves sur $]0\,,+\infty[$.

b) Point d'inflexion

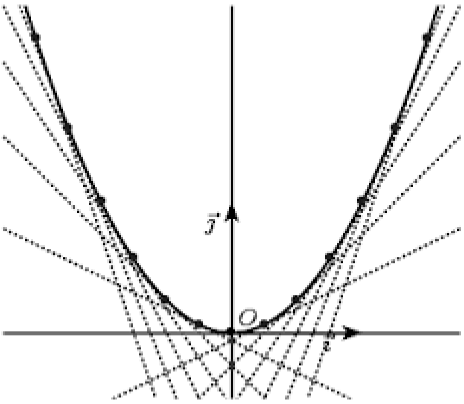
- Si $f''(a)=0$ et que f'' change de signe en a, alors f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité.



- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.

c) Convexité et tangente

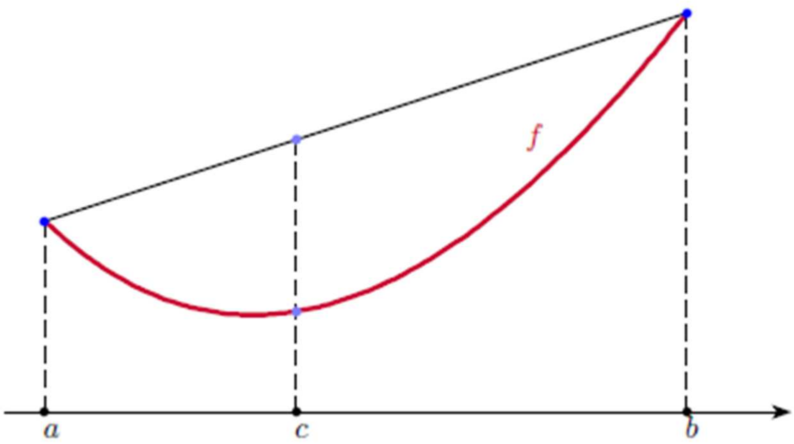
Si f est convexe et dérivable, sa représentation graphique est située au-dessus de ses tangentes.



Si f est concave et dérivable, sa représentation graphique est située au-dessous de ses tangentes.

d) **Convexité et cordes**

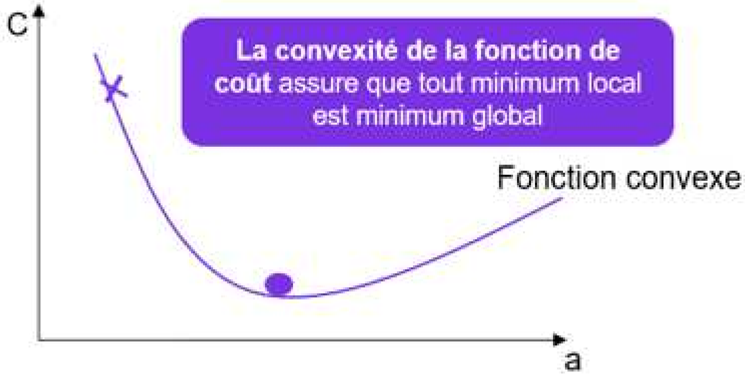
Si f est convexe, sa représentation graphique est située au-dessous de ses cordes.

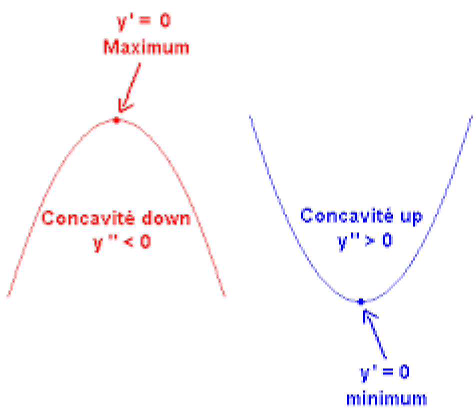


Si f est concave, sa représentation graphique est située au-dessus de ses cordes.

e) **Convexité et minimum** ***(programme 2023)***

Si la dérivée d'une fonction convexe f, de classe C^2 sur un intervalle ouvert (c'est à dire qu'elle est deux fois dérivable et que sa dérivée seconde est continue) s'annule en un point, alors f admet un minimum en ce point.





8. Branches infinies

- Si $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

On suppose dans ce qui suit que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique horizontale.
- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique verticale.

On se place désormais dans le cas où $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$.

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax \right] = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax.$.
- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax \right] = b$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

9. Tracé de courbes

a) Tracé d'une droite

Si la droite est non verticale, elle a pour équation $y = ax + b$.
Pour construire cette droite, deux points suffisent (deux abscisses et leurs images).
La droite d'équation $y = b$ est parallèle à l'axe des abscisses.
Si la droite est verticale, elle admet une équation de type $x = k$.

b) Tracé d'une courbe

Pour représenter graphiquement une fonction

- on travaille proprement au crayon gris dans un repère (O, I, J) (trois points suffisent),
- on porte toutes les informations remarquables évoquées par l'énoncé (extremum, c'est-à-dire minimum ou maximum, tangente, asymptotes, …)
- on construit point par point avec abscisses x et ordonnées $f(x)$ (pour construire une droite, deux points suffisent) à l'aide, si besoin, des valeurs remarquables ci-dessous.

c) Valeurs remarquables

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4 \qquad \ln(2) \approx 0{,}7 \qquad \mathrm{e} \approx 2{,}7 \qquad \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}4$$

VIII. Scilab *(programme 2022)*

1. Interaction avec l’utilisateur

- La commande **`x=input('message')`** écrit le message à l’écran, attends la réponse de l’utilisateur et stocke cette réponse dans la variable `x`.
- La commande **`disp('message')`** écrit le message (entre guillemets) à l’écran.
  La commande **`disp(u)`** écrit à l’écran la valeur de la variable `u`.

2. Nombres et opérations élémentaires

- Les nombres décimaux se notent avec un point et non une virgule.
- Le signe = est réservé à l’affectation d’une variable (par exemple : `x=3`).
- Constantes prédéfinies : `%pi` pour π et **`%e`** pour e.
- Fonctions usuelles :
  - La commande **`log(x)`** calcule ln(x).
  - La commande **`exp(x)`** calcule e^x.
  - La commande **`floor(x)`** calcule la partie entière de *x*, c’est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à *x*.
  - La commande `abs(x)` calcule $|x|$, la valeur absolue de *x*.
  - La commande `sqrt(x)` calcule $\sqrt{x}$.
  - La commande `ceil(x)` renvoie le plus petit nombre entier supérieur ou égal à *x*.
- Opérations arithmétiques : ne pas oublier les parenthèses le cas échéant.
  - Addition : `+`, soustraction : `−`, multiplication : `*`, division : `/` et puissance : `^`.
- Opérateurs de comparaisons pour les tests :
  - Test d’égalité : == (à ne pas confondre avec l’affection d’une variable).
  - Test de différence : <>.
  - Tests de comparaison : <, <=, >, >=.
  - Commandes `and` et `or` pour les tests logiques.

3. Matrices

a) Création de vecteurs et matrices

- Vecteur ligne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des espaces ou des virgules.

```
--> [-2 1 1.5]
 ans  =

  -2.   1.   1.5
```

```
--> [2,1,1.5]
 ans  =

   2.   1.   1.5
```

- Vecteur colonne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des points virgules.

```
--> [-2;1;1.5]
 ans  =

  -2.
   1.
   1.5
```

- Matrice : les éléments sont écrits entre crochets ; les éléments d'une ligne sont séparés par des virgules ; les lignes sont séparées par des points virgules.

```
--> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
 A  =

   1.   2.   3.
   4.   5.   6.
   7.   8.   9.
```

b) Création automatique de vecteurs lignes (utile pour les graphiques)

- La commande **`a:b`** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de *a* à *b* espacées de 1.

```
--> 1:6
 ans  =

   1.   2.   3.   4.   5.   6.
```

- La commande **`a:p:b`** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de *a* à *b* espacées de *p*.

```
--> 0:0.2:1
 ans  =

   0.   0.2   0.4   0.6   0.8   1.
```

```
--> 1:3:14
 ans  =

   1.   4.   7.   10.   13.
```

- La commande **`linspace(a,b,n)`** renvoie un vecteur ligne contenant *n* valeurs équiréparties entre *a* et *b*.

```
--> linspace(0,10,6)
 ans  =

   0.   2.   4.   6.   8.   10.
```

c) Matrices prédéfinies

- La commande **zeros(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ (n lignes et p colonnes) remplie de 0.

```
--> zeros(3,5)
 ans  =

   0.   0.   0.   0.   0.
   0.   0.   0.   0.   0.
   0.   0.   0.   0.   0.

--> zeros(1,6)
 ans  =

   0.   0.   0.   0.   0.   0.
```

- La commande **ones(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ remplie de 1.

```
--> ones(4,3)
 ans  =

   1.   1.   1.
   1.   1.   1.
   1.   1.   1.
   1.   1.   1.
```

- La commande **eye(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ avec des 1 sur la « diagonale » et des 0 ailleurs (`eye(3,3)` renvoie donc à I_3 par exemple).

```
--> eye(3,5)
 ans  =

   1.   0.   0.   0.   0.
   0.   1.   0.   0.   0.
   0.   0.   1.   0.   0.
```

d) Opérations sur les matrices

- La commande **u(k)** renvoie le k-ième élément d'un vecteur u.

```
--> u=1:2:15
 u  =

   1.   3.   5.   7.   9.   11.   13.   15.


--> u(4)
 ans  =

   7.
```

- La commande **length(u)** renvoie la taille (la longueur) du vecteur u.
- La commande `inv(A)` renvoie l'inverse d'une matrice carrée A.
- La commande `A'` renvoie la transposée de la matrice A.

- Les commandes **A+B**, **A−B**, **A*B**, **A^n** traduisent les opérations connues sur les matrices.
- Les commandes `A.*B`, `A./B`, `A.^ n` (avec le point) sont des opérations composantes par composantes, utiles dans les représentations graphiques de fonctions.
- Si u est un vecteur déjà défini, la commande **u(k)=...** modifie ou rajoute un élément à la k-ième position. Cela permet de construire un vecteur pas à pas (très utile pour les suites).

```
--> u=[1,2,3];

--> u(4)=8.5
 u  =

   1.   2.   3.   8.5


--> u(7)=-2
 u  =

   1.   2.   3.   8.5   0.   0.  -2.
```

- La commande `A(i,j)` renvoie le coefficient $a_{i,j}$ (i-ième ligne et j-ième colonne) de la matrice A.
- La commande `A(i,:)` renvoie la i-ième ligne de la matrice A.
- La commande `A(:,j)` renvoie la j-ième colonne de la matrice A.
- Si u est un vecteur déjà défini, la commande `u=[u,x]` rajoute l'élément x à la fin du vecteur u.
- La commande `spec(A)` renvoie les valeurs propres de A dans un vecteur colonne.
- La commande `[P,D]=spec(A)` renvoie une matrice diagonale D contenant les valeurs propres de A et une matrice P contenant les vecteurs propres associés.

4. Structures fondamentales

a) Boucle `for`

- Structure classique :

```
..①..
for ..②.. (do)
     ..③..
end
```

- Il s'agit d'une boucle dont **on contrôle le nombre de répétitions** grâce à la condition ②.
- ① représente en général les conditions initiales.
- ② s'exprime sous la forme `k=a:b`. C'est-à-dire qu'une variable k est créée puis qu'elle va prendre une à une toutes les valeurs de a jusqu'à b. Par exemple, la condition `k=1:n` signifie qu'il y aura n répétitions de l'instruction ③.

- L’instruction ③ sera répétée autant de fois que la condition ② le prévoit.
  - ***Exemples :***

Script 1

```
u=1
for k=1:4
   u=u+2
end
disp(u)
```

Explication 1

Au début, *u* vaut 1

4 répétitions « +2 » sont programmées

Affichage 1

```
9
```

Script 2

```
u=zeros(1,5)
u(1)=1
for k=1:4
   u(k+1)=u(k)+2
end
disp(u)
```

Explication 2

Au début, *u* vaut 0,0,0,0,0
Puis *u* vaut 1,0,0,0,0

4 répétitions sont programmées
on calcule $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ et $u(5)$

Affichage 2

```
1. 3. 5. 7. 9.
```

Script 3

```
u=ones(1,5)
for k=2:5
   u(k)=u(k-1)+2
end
disp(u)
```

Explication 3

Au début, *u* vaut 1,1,1,1,1

4 rép. sont programmées
on calcule $u(2)$, … , $u(5)$

Affichage 3

```
1. 3. 5. 7. 9.
```

b) Boucle `while`

- Structure classique :

```
..①..
while ..②.. do
    ..③..
end
```

- Il s’agit d’une boucle dont **on ne contrôle pas le nombre de répétitions**. La boucle continue tant que la condition ② est valable.
- Cette structure est adaptée lorsque l’on recherche un <u>seuil</u> à atteindre ou à dépasser.
- Il est souvent intéressant de créer un compteur de boucles pour savoir combien de boucles ont été effectuées.
- ***Exemples :***

Script 1

```
u=1
while u<=10000
   u=u*2
end
disp(u)
```

Affichage 1

```
16384
```

Script 2

```
u=1
n=0
while u<=10000
   u=u*2
   n=n+1
end
disp(n)
```

Affichage 2

```
14
```

Explication 1 :
Ce script décrit les termes d'une suite géométrique de raison 2. Au début u vaut 1.
Tant que u est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2.
En multipliant par 2, u augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000.
À ce moment-là, u vaut 16384.

Explication 2 :
Au début u vaut 1 et n vaut 0.
Tant que u est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2, mais, dans le même temps, n est augmenté de 1. n est donc un **compteur de boucles**.
En multipliant par 2, u augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000.
À ce moment-là, il y a eu 14 boucles d'effectuées.

c) Structures conditionnelles

if:

```
if .... then
    ....
end
```

if / else:

```
if .... then
    ....
else
    ....
end
```

If / elseif / else:

```
if .... then
    ....
elseif ... then
    ....
else
    ....
end
```

Exemple : que calcule le programme suivant ?

```
function y=f(x)
    y=x^2-2
endfunction
a=0
b=2
e=10^-5
while b-a>e
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)>0 then a=m
    else b=m
    end
end
disp(m)
```

Ce programme calcule la valeur approchée d'une équation de type $f(x)=0$ (en général en lien avec le théorème de la bijection).
Ici, $f(x)=x^2-2$. Comme on travaille sur l'intervalle $[0,2]$, ce programme calcule une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$.
Remarque : la définition d'une fonction Scilab est abordée, plus précisément, au paragraphe 6.

5. Simulations en probabilités

a) Simulation de lois uniformes continue et discrète

- La commande **`rand()`** renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
  Elle simule donc une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
- La commande `rand(n,m)` renvoie une matrice $n\times m$ dont chaque terme est un nombre aléatoire entre 0 et 1.
- La commande `n*rand()` simule la loi uniforme continue sur $[0,n]$.
- La commande `(b-a)*rand()+a` simule la loi uniforme continue sur $[a,b[$.
- La commande `floor(n*rand())` simule la loi uniforme discrète sur $[\![0,n-1]\!]$.
- La commande `floor(n*rand())+1` simule la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

b) Simulation des lois et variables usuelles

- La fonction `grand(n,m,"nom",parametres)` renvoie une matrice de taille $n\times m$ de réels représentant des simulations de la loi usuelle précisée dans les paramètres.
- `grand(n,m,"def")` a la même fonction que `rand(n,m)`.
- `grand(n,m,"unf",a,b)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi uniforme continue sur l'intervalle réel $[a,b[$.
- `grand(n,m,"uin",a,b)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi uniforme discrète sur l'intervalle d'entiers $[\![a,b]\!]$.
- `grand(n,m,"bin",N,p)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi binomiale de paramètres N et p.
- `grand(n,m,"geom",p)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi géométrique de paramètre p.
- `grand(n,m,"poi",mu)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi de Poisson de paramètre mu.
- `grand(n,m,"exp",1/lambda)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi exponentielle de paramètre lambda.
  Attention au paramètre : il s'agit de l'espérance de la loi.
- `grand(n,m,"nor",mu,sigma)` renvoie à $n\times m$ réels représentant des simulations de la loi normale de paramètres mu et sigma^2.
- `grand(n,"markov",A',X0)` renvoie n états successifs de la chaine de Markov de matrice de transition A et d'état initial X_0 (état non affiché et non compté dans les n états successifs par Scilab).

c) Simulation d'une probabilité égale à *p*

Exemple 1 :

```
if rand()<p then
     ....            // réalisé avec probabilité p
else
     ....            // réalisé avec probabilité 1-p
end
```

Exemple 2 : simulation d'une probabilité égale à 0,25

```
x=grand(n,m,"uin",1,4)
if x==1 then
     ....            // réalisé avec probabilité 0,25
else
     ....            // réalisé avec probabilité 0,75
end
```

6. Définition d'une fonction en Scilab

- **Exemple 1 :** pour définir la fonction $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ en Scilab, on procède de la manière suivante :

```
function y=f(x)
     y=x^2*exp(-x)
endfunction
```

- **Exemple 2 :** pour définir la fonction $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ en Scilab, on procède de la manière suivante :

```
function y=g(x)
     if x>0 then
          y=exp(-x)
     else
          y=0
     end
endfunction
```

- **Exemple 3 :** pour définir, en Scilab, la fonction aléatoire qui renvoie au nombre de tirages nécessaires, lors d'une partie de pile ou face, pour obtenir pour la première fois quatre face consécutivement, on procède de la manière suivante :

```
function y=quatrefaces()
   face=0
   y=0
   while face<4
       y=y+1
       piece=grand(1,1,'uin',0,1) //piece=floor(2*rand())
       if piece==1 then face=face+1
      else face=0
       end
   end
endfunction
```

- La variable y est muette et doit contenir le résultat du calcul de la fonction.
- Une fois la fonction définie, on l'appelle par son nom pour l'utiliser : par exemple, avec les exemples précédents, `f(1)` renvoie à e, `g(-2)` renvoie à 0 et `quatrefaces()` renvoie au nombre de tirages issues de la simulation demandée.

7. Graphiques

a) Fonction d'une variable

- La commande **`plot(x,y)`** ou **`plot2d(x,y)`** (avec x et y deux vecteurs de même taille) trace une courbe reliant les points de coordonnée (x, y), ((x, y) parcourant les vecteurs x et y).
- La commande `plot2d(x,y,-0)` (avec l'option -0) trace les points de coordonnées (x, y) sans les relier entre eux (pour tracer les termes d'une suite par exemple).
- ***Exemple :***

  Une première méthode pour tracer la courbe de la fonction $f(x)=x^2e^{-x}$ sur $[0,2]$ est

```
x=0:0.1:2
y=(x.^2).*exp(-x)          // penser au . pour la multiplication terme à terme
plot(x,y)                  // ou plot2d(x,y)
```

- La commande **`plot(x,f )`** ou **`fplot2d(x,f )`** (avec f une fonction définie en Scilab et x un vecteur pour les abscisses) trace le graphe de la fonction f.

- ***Exemple :***

  Une deuxième méthode pour tracer la courbe de la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur l'intervalle $[0,2]$ est :

```
function y=f(x)
     y=x^2*exp(-x)
endfunction

x=0:.1:2
plot(x,f) // ou fplot2d(x,f)
```

b) Diagrammes et histogrammes

- La commande **`bar(x,y)`** (avec x et y deux vecteurs de même longueur) trace un diagramme en bâtons avec x en abscisses et y en ordonnées.
- La commande **`histplot(x,y)`** (avec x et y deux vecteurs) dessine un histogramme des données contenues dans le vecteur y en utilisant les classes x.
- La commande `histplot(n,y)` (avec n un entier et y un vecteur) dessine un histogramme des données contenues dans le vecteur y en n classes équiréparties.
- La commande `histplot` peut être utilisée en probabilité pour « reconnaitre » des lois de variables aléatoires connues (discrètes ou à densité)
- La commande `pie(x)` (avec x un vecteur de nombres réels strictement positifs) trace un diagramme en camembert avec des secteurs proportionnels aux réels de x.

8. Statistiques

a) Statistiques à une variable

- Les commandes **`min(x)`** et **`max(x)`** renvoient le minimum et le maximum du vecteur *x*.
- La commande **`mean(x)`** renvoie la moyenne du vecteur x.
  Si `x=[1 2 3 4]`, `mean(x)` renvoie 2.5.
  Cette commande est utile en probabilités pour estimer une espérance.
- La commande `median(x)` renvoie la médiane (soit la valeur centrale soit la moyenne des deux valeurs centrales de la série ordonnée) du vecteur x.
  Si `x=[1 2 3 12]`, `median(x)` renvoie 2.5.
- La commande `sum(x)` renvoie la somme du vecteur x.
  Si `x=[1 2 3 4]`, `sum(x)` renvoie 10.
- La commande **`cumsum(x)`** renvoie les sommes cumulées croissantes du vecteur x.
  Si `x=[1 2 3 4]`, `cumsum(x)` renvoie [1 3 6 10].

- La commande `tabul(x,'i')` construit le tableau des effectifs des différents éléments du vecteur x en rangeant les valeurs dans l'ordre croissant ('i' pour « increase »).
  Si `x=[1 2 2 1 3 1 1]`, `tabul(x,'i')` renvoie :

```
1.   4.
2.   2.
3.   1.
```

- L'instruction `v=tabul(x,'i')` est utile pour construire un diagramme en bâton (avec la commande `bar`). Il est alors nécessaire d'extraire la première colonne et la deuxième colonne. La première colonne est obtenue avec la commande `v(:,1)` et la deuxième colonne avec l'instruction `v(:,2)`. On peut donc appliquer la commande `bar(v(:,1), v(:,2))`.
- La commande `dsearch(x,y)` renvoie au numéros de la classe de chaque éléments de x parmi les classes prédéfinies par y.
  Si `x=[9 8 3 9 1 6 3 8 2 1]` et `y=[0 1 2 2.5 3 3.5 4 6 10]`, `dsearch(x,y)` renvoie [8 8 4 8 8 7 4 8 4 2].
  En effet, les 9 valeurs de y créent 8 classes d'intervalles $]0,1],]1,2],]2,2.5],\ldots,]6,10]$, numérotée de 1 à 8. Le 9 (1^er^ élément de x) est dans le 8^e^ intervalle (1^er^ élément de dsearch(x,y)), et ainsi de suite… C'est en quelque sorte une matrice de « position ».
- L'instruction `[a,b]=dsearch(x,y)` renvoie à deux réponses :
  - la liste b, liste du nombre de valeurs (effectifs) dans chaque classe ;
  - la liste a, liste des positions (des numéros de classe) identique à celle obtenue avec `dsearch(x,y)`.

  Si `x=[9 8 3 9 1 6 3 8 2 1]` et `y=[0 1 2 2.5 3 3.5 4 6 10]`, `[a,b]=dsearch(x,y)` renvoie :

```
b  =

  0.   1.   0.   3.   0.   0.   1.   5.

a  =

  8.   8.   4.   8.   8.   7.   4.   8.   4.   2.
```

  Ainsi, par exemple, le 1er intervalle $]0,1]$ ne comprend aucune valeur de x tandis que le 8^{e} en comprend 5…
  Cette commande peut être utile pour construire un histogramme.
- La commande `corr(x,1)` : renvoie la variance de la série statistique x.
- La commande `sqrt(corr(x,1))` : renvoie l'écart-type de la série statistique x.
- La commande `stdev(x)` : renvoie l'écart-type estimé de la population dont est extraite la série statistique x.

b) Statistiques à deux variables

- La commande `corr(x,y,1)` : renvoie la covariance des séries statistiques x et y.

IX. Primitives et intégration

1. Primitive de *f* sur *I*

- Soient *f* et *F* deux fonctions définies sur un intervalle *I*. *F* est une primitive de *f* sur *I*, si la fonction *F* est dérivable sur *I* et a pour dérivée *f*. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.
- Si *f* est une fonction continue sur un intervalle *I*, alors *f* admet des primitives sur *I*.
- Si *f* est une fonction définie sur un intervalle *I* qui admet une primitive *F* sur *I*, alors :
  - les primitives de *f* sur *I* sont les fonctions de la forme $x \to F(x)+k,\ k \in \mathbb{R}$;
  - il existe une unique primitive de *f* sur *I* qui prend une valeur y_0 en x_0.

2. Formules de primitives à une constante près

$f(x)$	$\int f$	Forme de la fonction	Primitive
k constante	$k\,x$	$u'u$	$\frac{u^2}{2}$
$mx+p$	$m\frac{x^2}{2}+p\,x$	$u'u^2$	$\frac{u^3}{3}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2u^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{u'}{u^4}$	$-\frac{1}{3u^3}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{a\,x+b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$	$u'v$ (IPP)	$uv-\int uv'$
e^x	e^x		
e^{-x}	$-\mathrm{e}^{-x}$		
e^{2x}	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$		
$\mathrm{e}^{a\,x+b}$	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\,x+b}$		

3. Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I, on appelle intégrale de a et b de f (ou somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$) le nombre : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b$.

Exemple 1 : calculer $I = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x - 1\right)\mathrm{d}x$.

$$I = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 1\right) - (0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3+4+6-12}{12} = \frac{1}{12}.$$

Exemple 2 : calculer $J = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

$$J = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2\times 2^2} - \frac{1}{2} + \ln 2\right) - \left(-\frac{1}{2\times 1^2} - \frac{1}{1} + \ln 1\right).$$

$$\Leftrightarrow \qquad J = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8} + \ln 2.$$

4. Propriétés de l'intégrale

- **Relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

- **Linéarité**

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad ; \qquad \int_a^b (k\,f)(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- **Positivité**

  Si f est positive sur $[a\,;\,b]$ avec $a \le b$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

  On peut en déduire le signe d'une intégrale selon le signe de f et le sens de a et b.

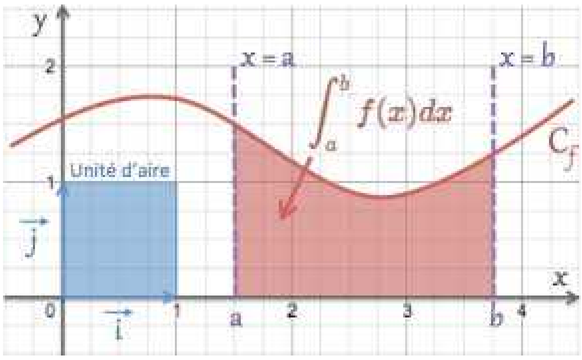
- **Conservation de l'ordre**

  Si $f \le g$ sur $[a\,;\,b]$ avec $a \le b$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

5. Intégrale et aire

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

Le réel $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



6. Intégration par parties

Voir vidéo dédiée : [lien Youtube]

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telles que u' et v' sont continues sur I. On a : $\int u\,v' = [u\,v] - \int u'\,v$.

Exemple : calculer $I = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

<u>Rédaction « type »</u>

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont continues et dérivables sur $[0{,}1]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On a :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

On intègre par parties :

$$\int u\,v' = [u\,v] - \int u'\,v$$

$$I = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) - (0) - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

7. Intégrales & Suites

L'idée consiste à considérer, pour tout n de **N**, une suite de fonctions $f_n(x)$ définies et continues sur un intervalle $[a\ ,\ b]$, puis d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbf{N},\ I_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit alors d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (monotonie, convergence…).

Dans beaucoup d'exercices types, $I_0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

8. Fonction définie par une intégrale

Soient g une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de g sur I qui s'annule en a. Autrement dit, f est une fonction dérivable sur I et $f'(x) = g(x)$.

Exemple : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

9. Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,,b]$ et soient $a_0 = a < a_1 < .. < a_{n-1} < a_n = b$ ses points de discontinuités.

L'intégrale de a à b est le nombre réel défini par : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ 6]$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x & \text{si } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x + \int_1^2 x\ \mathrm{d}x + \int_2^3 -x\ \mathrm{d}x + \int_3^6 0\ \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + 0,$$

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right) + \left(-\frac{3^2}{2}\right) - \left(-\frac{2^2}{2}\right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

10. Intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

- Lorsque $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, on définit l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- On écrit alors : « sous réserve de convergence, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. »
- On étend cette définition à $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

  « sous réserve de convergence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. »

Exemple : calculer $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Sous réserve de convergence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A^2}\right) = 1.$$

X. <u>Probabilités continues</u>

1. Lois à densité

a) Rappels sur la continuité et la dérivabilité

- Toute fonction dérivable sur un intervalle y est continue.
- Contraposée : toute fonction non continue en un point n'est pas dérivable en ce point.
- Soit f une fonction définie par morceaux à gauche et à droite d'un point a.

  f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

b) Rappel et complément sur les intégrales

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,,b]$ et soient

  $a_0 = a < a_1 < .. < a_{n-1} < a_n = b$ ses points de discontinuités éventuels.

  On appelle intégrale de a à b le nombre réel défini par : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Sous réserve de convergence, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Densité de probabilité

Plus généralement, une variable aléatoire X admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue par morceaux et telle que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Toute fonction f :

- continue sur $\mathbb{R}$ (sauf, éventuellement, pour des points isolés)
- positive sur $\mathbb{R}$
- telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

peut être considérée comme une densité de probabilité.

d) Espérance, variance

- Lorsque l'intégrale existe, la v.a. X de densité f admet pour espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Lorsque l'intégrale existe, la v.a. X de densité f admet pour variance :

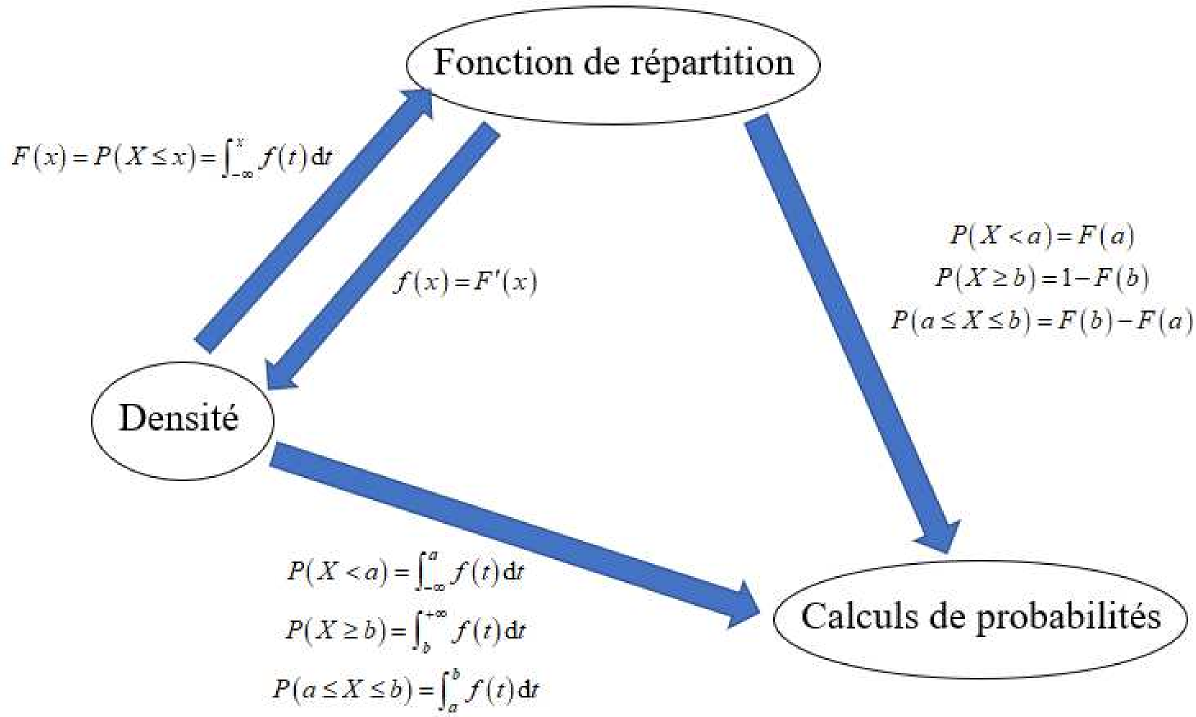
$$V(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(E(X) - t\right)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \left(E(X)\right)^2$$

- Rappel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

e) Fonction de répartition

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Lorsque la fonction de répartition F de X est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f = F'$, la loi de probabilité de X est définie par une intégrale :

f) **<u>Important</u> : liens densité / fonction de répartition / calcul de probabilités**



2. Lois à densité usuelles (« cartes d'identité »)

a) Loi uniforme

i. Loi uniforme sur $[0;1]$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme continue sur $[0;1]$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$.

On choisit un nombre réel au hasard entre 0 et 1.

① Valeurs prises par X :

$X(\Omega)=[0;1]$

② Fonction densité :

X admet pour densité : $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

③ Fonction de répartition :

X admet pour fonction de répartition : $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$.

④ Espérance :

$E(X)=\dfrac{1}{2}$

⑤ Variance :

$$V(X)=\frac{1}{12}$$

⑥ Simulation en informatique :

Scilab ***(programme 2022)***

Les commandes `rand(n,m)`, `grand(n,m,"def")` ou `grand(n,m,"unf",0,1)` renvoient une matrice $n\times m$ dont chaque terme est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

ii. Loi uniforme sur $[a;b]$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme continue sur $[a;b]$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

On choisit un nombre réel au hasard entre a et b.

① Valeurs prises par X :

$$X(\Omega)=[a;b]$$

② Fonction densité :

X admet pour densité : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leq x\leq b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

③ Fonction de répartition :

X admet pour fonction de répartition : $F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{si } a\leq x\leq b\\ 1 \quad \text{si } x>b\end{cases}$.

④ Espérance :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

⑤ Variance :

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

⑥ Simulation en informatique :

Scilab ***(programme 2022)***

La commande `grand(n,m,"unf",a,b)` renvoit une matrice $n\times m$ dont chaque terme est un nombre aléatoire de $[a,b[$.

b) Loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

① Valeurs prises par X :
$X(\Omega) = [0;+\infty[$

② Fonction densité :

X admet pour densité : $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

③ Fonction de répartition :

X admet pour fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

④ Espérance :
$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

⑤ Variance :
$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

⑥ Simulation en informatique :
Scilab *(programme 2022)*
`grand(n,m,"exp",1/lambda)` renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi exponentielle de paramètre lambda.
Attention au paramètre : il s'agit de l'espérance de la loi.

⑦ Propriété : absence de mémoire / durée de vie sans vieillissement :
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors pour tous réels positifs (x,t) : $P_{(X>x)}(X > x+t) = P(X > t)$.

c) Loi normale

- Soit X est une v.a. suivant la loi normale centrée réduite de paramètres m et σ^2.
  On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

  X admet pour densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\boxed{E(X) = m}$, $\boxed{V(X) = \sigma^2}$

- Loi normale centrée réduite : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

  Z admet pour densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $\boxed{E(Z) = 0}$, $\boxed{V(Y) = 1}$

  Des valeurs de la fonction de répartition Φ de $\mathcal{N}(0,1)$ sont données dans les énoncés.

  On a : $\Phi(b) = P(Z \leq b)$ et $\Phi(-b) = 1 - \Phi(b)$.

- ***Variable centrée réduite*** : soient X et Z deux variables aléatoires telles que : $\boxed{Z = \dfrac{X-m}{\sigma}}$.

  $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) \Leftrightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

  Conséquence : n'importe quelle probabilité liée à une loi normale se détermine en se ramenant à la loi normale centrée réduite et à l'utilisation de sa fonction de répartition.
- `grand(n,m,"nor",mu,sigma)` renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi normale de paramètres mu et sigma^2.

XI. Convergence, approximations et estimation

1. Premiers théorèmes de convergence en probabilité

a) Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité.
Si X est positive et admet une espérance, alors :

$$\forall a > 0,\ P([X \geq a]) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité. Si X admet une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left[\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

2. Suites de variables aléatoires discrètes finies

- Les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si, pour tout choix de n intervalles réels I_1, ..., I_n, les événements $[X_1 \in I_1]$, ..., $[X_n \in I_n]$ sont mutuellement indépendants.
- Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout entier $n \geq 1$, les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes ou à densité indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance V.
  Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires :

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \qquad \text{et} \qquad \overline{X_n} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

S_n admet une espérance et une variance et on a : $E(S_n) = n \times m$ et $V(S_n) = n \times V$.

$\overline{X_n}$ admet une espérance et une variance et on a : $E\left(\overline{X_n}\right) = m$ et $V\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{V}{n}$.

3. Loi faible des grands nombres

- D'une façon générale, si l'on considère *n* épreuves identiques consécutives, on démontre que la fréquence relative d'un événement tend vers la probabilité de cet événement lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.
- Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance *m* et une même variance et soit pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n=\dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$.

  Alors $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left[\left|\overline{X}_n-m\right|\geq\varepsilon\right]\right)=0$.

4. Estimation *(programme 2023)*

a) Estimation ponctuelle

- Le principe : Il s'agit d'élaborer une stratégie d'estimation d'un paramètre θ en raisonnant sur des variables aléatoires.
- Soit $n\geq 1$ fixé. Un *n*-échantillon de *X* est un *n*-uplet de variables aléatoires $(X_1, ... , X_n)$ mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que *X*.
- Une réalisation d'un *n*-échantillon est un *n*-uplet $(x_1, ... , x_n)$ où, pour tout *i*, x_i est la valeur prise par X_i.
- La réalisation de $\overline{X_n}=\dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ observée sur l'échantillon $x_1, ... , x_n$ est l'estimation du paramètre obtenue sur cet échantillon.

b) Estimation par intervalle de confiance

- Cas d'une variable de Bernoulli :

  La probabilité que l'intervalle $\left[\overline{X_n}-\sqrt{\dfrac{V(X)}{na}}\ ;\ \overline{X_n}+\sqrt{\dfrac{V(X)}{na}}\right]$ contienne la moyenne $E(X)$ est supérieure à $1-a$. Ce résultat, non exigible, se déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- En pratique, la variance *V* est inconnue, mais on peut la majorer par $\dfrac{1}{4}$: la probabilité que l'intervalle $\left[\overline{X_n}-\sqrt{\dfrac{1}{4na}}\ ;\ \overline{X_n}+\sqrt{\dfrac{1}{4na}}\right]=\left[\overline{X_n}-\dfrac{1}{2\sqrt{na}}\ ;\ \overline{X_n}+\dfrac{1}{2\sqrt{na}}\right]$ contienne la moyenne $E(X)$ est supérieure à $1-a$.

  On dit aussi : l'intervalle $\left[\overline{X_n}-\dfrac{1}{2\sqrt{na}}\ ;\ \overline{X_n}+\dfrac{1}{2\sqrt{na}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau au moins $1-a$.

- Cas de variables suivant $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ (écart-type connu) :

  Soient $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in\left]0;+\infty\right[$. L'intervalle de confiance au niveau $1-a$ est :

  $\left[\overline{X_n}-\frac{t_a\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X_n}+\frac{t_a\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ avec $\Phi(t_a)=1-\frac{a}{2}$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

-

α	10%	5%
$1-\alpha$	90%	95%
t_α	1,645	1,960

5. Estimation *(programme 2022)*

a) Estimation ponctuelle

- Le principe : Il s'agit d'élaborer une stratégie d'estimation d'un paramètre θ en raisonnant sur des variables aléatoires.
- Soit $n\geq 1$ fixé. Un n-échantillon de *X* est un n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\ldots,X_n)$ mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que *X*.
- Une réalisation d'un n-échantillon est un n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ où, pour tout i, x_i est la valeur prise par X_i.
- **Estimateur :**

  Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon.

  Un estimateur est une variable aléatoire de la forme $T_n=\varphi(X_1,\ldots,X_n)$.
- Estimation :

  L'estimation de θ est la réalisation $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ de l'estimateur T_n.
- **Biais d'un estimateur :**

  Si pour tout θ, T_n admet une espérance, le biais de T_n est le réel : $\boxed{b(T_n)=E(T_n)-\theta}$.

  L'estimateur T_n de θ est dit sans biais si $E(T_n)=\theta$.
- **Risque quadratique d'un estimateur**

  Si T_n^2 admet une espérance, le risque quadratique de T_n est le réel :

  $r(T_n)=E\left((T_n-\theta)^2\right)$; On a : $\boxed{r_\theta(T_n)=V_\theta(T_n)+\left(b_\theta(T_n)\right)^2}$

  - Le risque quadratique d'un estimateur sans biais n'est rien d'autre que sa variance.
  - Un estimateur est d'autant meilleur que son risque est faible.

b) Estimation par intervalle de confiance

- Soient U_n et V_n deux estimateurs. On dit que $[U_n \, , V_n]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$ (ou au risque α, au seuil α) où $\alpha \in [0 \, , 1]$ si, pour tout $\theta \in \Theta$, $P_\theta([U_n \leq \theta \leq V_n]) \geq 1-\alpha$.
- Intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de Bernoulli :

  L'intervalle $\left[\overline{X_n} - \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}} \, ; \, \overline{X_n} + \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau au moins $1-\alpha$.

6. Exercice corrigé *(programme 2022)*

Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, a]$

On note $T_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de *a*.

2. Calculer son risque quadratique.

Correction

1. $E(T_n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

De plus, pout tout *i* compris entre 1 et *n*, $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}[0,a]$. Donc $E(X_i) = \frac{a}{2}$.

Dès lors, $E(T_n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2} = \frac{2}{n} \times n \times \frac{a}{2} = a$.

T_n est bien un estimateur sans biais de *a*.

2. Son risque quadratique est donc égal à sa variance.

$$r(T_n) = V(T_n) = V\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$\Leftrightarrow \quad r(T_n) = \frac{4}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ car $V(mX) = m^2 V(X)$.

$\Leftrightarrow \quad r(T_n) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ car les variables aléatoires sont indépendantes.

De plus, pout tout *i* compris entre 1 et *n*, $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}[0,a]$. Donc $V(X_i) = \frac{a^2}{12}$.

Dès lors, $r(T_n) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{a^2}{12} = \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3n}$.

★ Complément (difficile) : variables $T_n = \min(X_1, ... , X_n)$ et $M_n = \max(X_1, ... , X_n)$

Soient $X_1, ... , X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi continue de fonction de répartition $F_X(x)$.

Pour déterminer les densités de ces variables, il faut d'abord déterminer leurs fonctions de répartition.

Déterminons la fonction de répartition de M_n. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X_1, ... , X_n) \leq x)$.

Or, $\max(X_1, ... , X_n)$ est inférieur à un nombre si, et seulement si, tous les X_i sont eux-mêmes plus petits que ce nombre. C'est-à-dire :

$$F_{M_n}(x) = P([X_1 \leq x] \cap ... \cap [X_n \leq x])$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{M_n}(x) = P(X_1 \leq x) \times ... \times P(X_n \leq x) \text{ par indépendance des } X_i.$$

Finalement, $F_{M_n}(x) = (F_X(x))^n$.

La densité de M_n est finalement $f_{M_n}(x) = F'_{M_n}(x) = n \times F'_X(x) \times (F_X(x))^{n-1}$.

Déterminons la fonction de répartition de T_n. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$P(T_n > x) = P(\min(X_1, ... , X_n) > x)$.

Or, $\min(X_1, ... , X_n)$ est supérieur à un nombre si, et seulement si, tous les X_i sont eux-mêmes plus grands que ce nombre. C'est-à-dire :

$$P(T_n > x) = P([X_1 > x] \cap ... \cap [X_n > x])$$

$$\Leftrightarrow \quad P(T_n > x) = P(X_1 > x) \times ... \times P(X_n > x) \text{ par indépendance des } X_i.$$

Finalement, $P(T_n > x) = (1 - F_X(x))^n$ puis :

$F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = 1 - P(T_n > x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$

La densité de T_n s'en déduit par dérivation.