Approfondissements sur les limites

I. Asymptotes

1. Asymptote verticale

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la représentation graphique de f .

Exemple : représentation graphique de la fonction inverse en 0

2. Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$. La droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale de la représentation graphique de f .

Remarque :

Lors de la construction d'une représentation graphique, il est utile parfois de construire d'abord l'asymptote afin de "guider" la courbe.

3. Asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f .

II. Limites et opérations

1. Opérations sur les limites

➤ Somme, produit, quotient de fonctions, composée de fonctions

Somme

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)+v(x)]$
L	L'	L + L'
L ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
L ou $-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	??

Produit :

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} [u(x) \times v(x)]$
L	L'	L × L'
L ≠ 0 ou ± ∞	± ∞	□ ∞
0	± ∞	F.I.

Inverse :

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{u(x)}$
L ≠ 0	$\frac{1}{L}$
0⁺	+ ∞
0⁻	- ∞
+ ∞ ou - ∞	0

Puis quotient.

On dispose de résultats analogues pour les limites de suites.

Un cas particulier à connaître : limites d'une fonction rationnelle (exercice 3)

2. Composée de deux fonctions

★ Exercice :

Soit g définie sur $] -\infty ; 1[$ par $g(x) = \sqrt{\frac{4x-5}{x-1}}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.