Approfondissements sur les limites
Exercices

★ Exercice 9.1 *Limite d'une somme*

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $f(x) = -3x + \dfrac{2}{x}$ **2.** $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2$ **3.** $f(x) = \dfrac{-2}{x^2} + 8$ **4.** $f(x) = -1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Correction :

Technique : « point, point, accolade, par somme »

1. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x^2} = 0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 8 = 8 \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 8$

4. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

★ Exercice 9.2 *Limite d'une différence*

Déterminer la limite des fonctions suivantes en + ∞ :

1. $f(x)=3x-\dfrac{1}{x}$ **2.** $f(x)=\dfrac{4}{x}-2x^2$ **3.** $f(x)=-x-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Correction :

Technique : « point, point (avec le '–' en bas), accolade, par somme »

1. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x=+\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}=0 \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x}=0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2=-\infty \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

3. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{\sqrt{x}}=0 \end{array}\right\}$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

★ Exercice 9.3 *Limite d'un produit*

Déterminer la limite des fonctions suivantes en + ∞ :

1. $f(x)=x\left(4+\dfrac{2}{x}\right)$ **2.** $f(x)=x^2\left(3-\sqrt{x}\right)$ **3.** $f(x)=(2x+1)(3-x)$

Correction :

Technique : « point, point, accolade, par produit »

1. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 4+\dfrac{2}{x}=4 \end{array}\right\}$ Par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 3-\sqrt{x}=-\infty \end{array}\right\}$ Par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

3. $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=+\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} 3-x=-\infty \end{array}\right\}$ Par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

★ **Exercice 9.4** ***Limite de polynômes en $\pm\infty$ (technique du monôme de plus haut degré)***

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=-3x^2+5x+2$ **2.** $f(x)=-x^3+x^2-4x+5$

Correction :

Technique : règle du monôme de plus haut degré car on est en l'infini

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3=+\infty$

★ **Exercice 9.5** ***Limite de fonctions rationnelles en $\pm\infty$ (monôme de plus haut degré)***
Asymptotes horizontales

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes et interpréter lorsque cela est possible en termes d'asymptotes :

1. $f(x)=\dfrac{-x^5+x^2-4x+5}{x^2+3x+1}$ **2.** $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2-1}{2x^4+x-2}$ **3.** $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-4x+1}$

Correction :

Technique : règle du monôme de plus haut degré car on est en l'infini

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^5}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^5}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3=+\infty$ (4 étapes)

(détail du calcul intermédiaire <u>*à ne pas écrire*</u> : $\dfrac{-x^5}{x^2}=\dfrac{-x\times x\times x\times \cancel{x}\times \cancel{x}}{\cancel{x}\times \cancel{x}}=-x\times x\times x=-x^3$).

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}$ (3 étapes possibles)

(détail du calcul intermédiaire <u>*à ne pas écrire*</u> : $\dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1\times \cancel{x}\times \cancel{x}\times \cancel{x}\times \cancel{x}}{2\times \cancel{x}\times \cancel{x}\times \cancel{x}\times \cancel{x}}=\dfrac{1}{2}$).

La droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x}=0$ (4 étapes)

(détail du calcul intermédiaire <u>*à ne pas écrire*</u> : $\dfrac{3x}{x^2}=\dfrac{3\times \cancel{x}}{x\times \cancel{x}}=\dfrac{3}{x}$).

La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $+\infty$.

★ **Exercice 9.6** ***Limite de fonctions rationnelles en $\pm\infty$ (monôme de plus haut degré)***
Limite de fonctions rationnelles en une valeur interdite (limite d'un quotient)
Asymptotes horizontales et verticales

Pour chacune des fonctions suivantes :
a) Déterminer l'ensemble de définition.
b) Déterminer leurs limites aux bornes de leur ensemble de définition.
Interpréter graphiquement lorsque cela est possible.

1. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+4}$ **2.** $f(x)=\dfrac{2x-5}{-x+2}$ **3.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$ **4.** $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

Correction :

Remarque : ces fonctions sont des fonctions rationnelles ; elles sont définies lorsque leur dénominateur est différent de 0.
Technique 1 : à l'infini, règle du monôme de plus haut degré
Technique 2 : en une valeur interdite, signe du dénominateur puis « point, point, accolade, par quotient » sachant que « 1 / $0^{\pm}$ = $\pm\infty$ » (interdit de l'écrire)

1. a) $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$. *f* est définie sur $]-\infty\,;-4[\cup]-4\,;+\infty[$.

b) Il y a 4 limites à déterminer ($-\infty$, -4^-, -4^+ et $+\infty$). On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

La droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $+\infty$.

② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

La droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $-\infty$.

Il reste les 2 limites en la valeur interdite.

➢ ***Signe du dénominateur*** : $x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$

Dès lors :

③ $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to-4} 2x+1=-7\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-4^-} x+4=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=+\infty$ puis

④ $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to-4} 2x+1=-7\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-4^+} x+4=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=-\infty$

La droite d'équation $x=-4$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

2. a) $-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$. *f* est définie sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;+\infty[$.

b) Il y a 4 limites à déterminer ($-\infty$, 2^-, 2^+ et $+\infty$). On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{-x}=-2$

La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $+\infty$.

② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-x}=-2$

La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $-\infty$.

Il reste les 2 limites en la valeur interdite.

➢ ***Signe du dénominateur*** : $-x+2\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -2 \Leftrightarrow x\leq 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	+	0	−

Dès lors :

③ $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 2} 2x-5=-1\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^-} -x+2=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ puis

④ $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 2} 2x-5=-1\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^+} -x+2=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

3. a) Pour déterminer les valeurs interdites, on calcule le discriminant cat x^2+3x+2 est un trinôme du second degré.

$a=1$, $b=3$, $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=9-8=1>0$

Il y a deux racines (donc deux valeurs interdites) :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$ et

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

Finalement, *f* est définie sur $]-\infty\ ;-2[\cup]-2\ ;-1[\cup]-1\ ;+\infty[$.

b) Il y a 6 limites à déterminer ($-\infty$, -2^-, -2^+, -1^-, -1^+ et $+\infty$).

On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $+\infty$.

② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $-\infty$.

Il reste les 4 limites en la valeur interdite.

➢ ***Signe du dénominateur*** : il est du signe de 1 à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dès lors :

③ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to-2} x^2+1=5 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2+3x+2=0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ puis

④ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to-2} x^2+1=5 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2+3x+2=0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$

La droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

⑤ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to-1} x^2+1=2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-1^-} x^2+3x+2=0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ puis

⑥ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to-1} x^2+1=2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-1^+} x^2+3x+2=0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

4. a) Le déterminant est un trinôme du second degré, mais on reconnait l'identité remarquable : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$x^2-1=(x-1)(x+1)$, donc 1 et -1 sont les racines évidentes (il n'y en a pas d'autre).

Finalement, *f* est définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;\,1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

b) Il y a 6 limites à déterminer ($-\infty$, -1^-, -1^+, 1^-, 1^+ et $+\infty$).

On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $+\infty$.

② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $-\infty$.

Il reste les 4 limites en la valeur interdite.

➢ ***Signe du dénominateur*** : il est du signe de 1 à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dès lors :

③ $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1} x^2-2x+3=6 \\ \bullet \lim\limits_{x\to -1^-} x^2-1=0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ puis

④ $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1} x^2-2x+3=6 \\ \bullet \lim\limits_{x\to -1^+} x^2-1=0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

⑤ $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1} x^2-2x+3=2 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1^-} x^2-1=0^- \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ puis

⑥ $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1} x^2-2x+3=2 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1=0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

★ Exercice 9.7 *Asymptote oblique*

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer que la droite d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique en $+\infty$ aux courbes représentatives.

1. $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}$ **2.** $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x+1}$ **3.** $f(x)=\dfrac{2x^2+3x}{x+1}$

Correction :

Technique : 2 petits points

① étape 1 « calcul de la différence »

② étape 2 « limite du résultat »

1. • $f(x)-(2x+1)=2x+1+\dfrac{1}{x}-2x-1=\dfrac{1}{x}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

La droite d'équation $y=2x+1$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de *f*.

2. • $f(x)-(2x+1)=2x+1-\dfrac{1}{x+1}-2x-1=-\dfrac{1}{x+1}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x+1}=0$

La droite d'équation $y=2x+1$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de *f*.

3. *(plus difficile car il y a plus de calcul)*

- $$f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2+3x}{x+1}-(2x+1)=\frac{2x^2+3x-(2x+1)(x+1)}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2+3x-\left(2x^2+2x+x+1\right)}{x+1}=\frac{2x^2+3x-2x^2-2x-x-1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)-(2x+1)=\frac{-1}{x+1}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+1}=0$$

La droite d'équation $y=2x+1$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de *f*.

★ Exercice 9.8 *Limite d'une composée*

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\sqrt{x^2-5}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^3$ **3.** $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+3x\right)^2$

Correction :

Technique : « point, point, accolade, par composée »

1. $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 3} x^2-5=4\\ \bullet\ \lim\limits_{X\to 4}\sqrt{X}=2\end{array}\right\}$ Par composée de limites, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

2. $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=2\\ \bullet\ \lim\limits_{X\to 2} X^3=8\end{array}\right\}$ Par composée de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=8$

3. $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+3x=14\\ \bullet\ \lim\limits_{X\to 14} X^2=196\end{array}\right\}$ Par composée de limites, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=196$