Lois de probabilités discrètes

I. V.a.r. et loi de probabilité

Soit Ω un univers et P une probabilité. Une v.a.r. X définie sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit une variable aléatoire X sur un univers fini Ω, on pose $X(\Omega)=\{x_1, \ldots, x_n\}$.
Alors les ensembles $(X = x_k)_{k=1\ldots n}$ sont un système complet d'événements de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} (X = x_k)$$

Il s'agit du système complet d'événements associé à la variable aléatoire X.
Ce système complet est intéressant car il découpe l'univers Ω en région où X est constante. En fait il découpe Ω selon la valeur de X.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est présenter l'ensemble des valeurs x_i prises par X et calculer les probabilités $P[X = x_i]$ correspondantes.

Remarque :
Cette présentation se fait généralement à l'aide d'un tableau ou à l'aide d'une formule.

II. Espérance mathématique

L'espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire X est la moyenne de ses valeurs x_1 , x_2, … , x_n pondérées par les probabilités p_1, p_2, … , p_n :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i = \sum_i x_i p[X = x_i]$$

L'espérance mathématique $E(X)$ correspond à la moyenne $\overline{x}$ d'une série statistique.
*Le terme "espérance mathématique" vient des jeux de hasard et représente le gain moyen d'un joueur. Un jeu d'espérance nulle est alors dit **équitable**.*

III. Propriétés de l'espérance

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$
$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$
$$E(X-Y) = E(X)-E(Y)$$