

Lois de probabilités discrètes

Exercices

Lois de probabilités

★ Exercice 10.1

On lance une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer effectué associe le nombre 0 si on obtient pile et le nombre 1 si on obtient face.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ? (c'est-à-dire, donner $X(\Omega)$)
2. Déterminer la loi de probabilité de X .

Correction :



Pour déterminer une loi de probabilité :

- ① on détermine les valeurs prises par X , c'est-à-dire $X(\Omega)$,
- ② on calcule pour toute valeur k de $X(\Omega)$, la probabilité $P(X = k)$.

Ce dernier résultat peut se présenter à l'aide d'un tableau ou à l'aide d'une formule.

1. X prend soit la valeur 0, soit la valeur 1. $X(\Omega) = \{0 ; 1\}$.
2. La pièce étant équilibrée, on a :

x_i	0	1
p_i	0,5	0,5

★ Exercice 10.2

On lance un dé à six faces bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer effectué associe le numéro de la face supérieur.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .

Correction :

1. X prend soit les valeurs de 1 à 6. $X(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.

2. Le dé étant équilibré, on a :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

★ **Exercice 10.3**

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

1. Parcours vert : Calculer $P(X \leq 2,4)$.

2. Calculer $P(0,2 < X \leq 2,8)$.

Correction :

1. $P(X \leq 2,4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8$.

2. $P(0,2 < X \leq 2,8) = P(X=1) + P(X=2) = 0,3 + 0,4 = 0,7$.

Espérance

★ **Exercice 10.4**

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

Calculer l'espérance de X .

Correction :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots$$

$$E(X) = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 0,3 + 0,8 + 0,6 + 0,4 = 2,1.$$



★ Exercice 10.5

Calculer l'espérance de la loi de probabilité de l'exercice 3

Correction :

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 0 + 0,3 + 0,8 + 0,6 = 1,7.$$

★ Exercice 10.6

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-5	-2	0	1	3	6
p_i	1 / 6	1 / 12	1 / 4	1 / 4	1 / 12	1 / 6

Calculer son espérance.

Correction :

$$\begin{aligned} E(X) &= (-5) \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{-5}{6} - \frac{2}{12} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{12} + \frac{6}{6} \\ \Leftrightarrow E(X) &= \frac{-10 - 2 + 0 + 3 + 3 + 12}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

★ Exercice 10.7

Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X .

Correction :

1. X prend soit la valeur 0, soit la valeur 1, soit la valeur 10. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 10\}$.

Le dé étant équilibré, on a :

x_i	0	1	10
p_i	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. $E(X) = 0 \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{0+2+10}{6} = \frac{12}{6} = 2.$

★ **Exercice 10.8**

La roue d'une loterie comporte dix secteurs identiques dont quatre rapportent 1 €, cinq rapportent 3 € et un rapporte 10 €. Le joueur doit miser 3 € avant de lancer la roue.

1. Le jeu est-il favorable au joueur ?
2. Déterminer le montant de la mise pour que le jeu soit équitable.

Correction :



Un jeu est favorable à un joueur si son espérance est positive (ce qui n'arrive jamais dans la réalité), et défavorable au joueur si son espérance est négative.

Lorsque l'espérance d'un jeu est nulle, on dit que le jeu est équitable.

1. Déterminons d'abord la loi de probabilité. Attention à bien tenir compte de la mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

X prend soit la valeur -1 , soit la valeur 0 , soit la valeur 7 . $X(\Omega) = \{-2 ; 0 ; 7\}$.

On en déduit la loi :

x_i	-2	0	7
p_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = (-2) \times \frac{4}{10} + 0 \times \frac{5}{10} + 7 \times \frac{1}{10} = \frac{-8+0+7}{10} = -\frac{1}{10} = -0,1.$$

Le jeu est donc défavorable au joueur.

2. D'après l'espérance, le joueur perd en moyenne 0,10 € par jeu. Pour que le jeu soit équitable, il suffit donc de miser 2,90 € au lieu de 3 €.

★ Exercice 10.9

Une urne contient n jetons : 5 jetons rouges et $(n-5)$ jetons noirs, numérotés de 1 à n , $n \geq 5$.

Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux jetons de l'urne. On note p_n la probabilité de l'événement A : « les deux jetons sont de couleur différentes ». On admet que

$p_n = \frac{10n-50}{n^2-n}$. Le joueur gagne 2 € si A est réalisé et perd 1 € sinon.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de probabilité de X et vérifier que $E(X) = \frac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}$.
2. Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.

Correction :

1. D'après l'énoncé :

x_i	-1	2
p_i	$1-p_n$	p_n

Dès lors :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (-1) \times \left(1 - \frac{10n-50}{n^2-n}\right) + 2 \times \frac{10n-50}{n^2-n} = -1 + \frac{10n-50}{n^2-n} + 2 \times \frac{10n-50}{n^2-n} \\
 \Leftrightarrow E(X) &= -1 + 3 \times \frac{10n-50}{n^2-n} = \frac{-(n^2-n) + 3(10n-50)}{n^2-n} = \frac{-n^2 + n + 30n - 150}{n^2-n} \\
 \Leftrightarrow E(X) &= \frac{-n^2 + 31n - 150}{n^2-n}
 \end{aligned}$$

2. Le jeu est équitable si : $E(X) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n} = 0$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 31n - 150 = 0$$

Le discriminant de $-n^2 + 31n - 150 = 0$ est :

$$31^2 - 4 \times (-1) \times (-150) = 961 - 600 = 361 = 19^2 > 0.$$

Ainsi, l'équation possède deux solutions :

$$n = \frac{-31-19}{2 \times (-1)} = \frac{-50}{-2} = 25 \text{ ou } n = \frac{-31+19}{2 \times (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

L'urne peut contenir 6 jetons (5 rouges, un noir) ou bien 25 jetons (5 rouges et 20 noirs).

Propriétés de l'espérance

★ Exercice 10.10

Soit X la variable aléatoire égale à la valeur de la face supérieure lors du lancer d'un dé bien équilibré. On rappelle que l'espérance $E(X)$ est égale à $\frac{7}{2}$. Un joueur lance quatre dés. Soit Z la variable aléatoire égale à la somme des quatre valeurs obtenues sur les faces supérieures lors du lancer des dés. Sans calculer la loi de probabilité de Z , déterminer l'espérance $E(Z)$.

Correction :



La linéarité de l'espérance permet d'écrire : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Dans cet exercice, $Z = 4X$.

Par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(4X) = 4E(X) = 4 \times \frac{7}{2} = 14$.

★ Exercice 10.11

1. Calculer la moyenne théorique de la variable aléatoire indiquant la face obtenue en lançant un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12.
2. On lance simultanément deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6 et trois dés à 12 faces numérotées de 1 à 12.
Quelle est la moyenne théorique de la variable aléatoire obtenue en faisant la somme des points indiqués par chaque dé ?

Correction :

1. Soit X la variable aléatoire associée à la valeur de la face supérieure. On a :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On a donc :
$$E(X) = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{12} + \dots + 12 \times \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{1}{12}(1 + 2 + \dots + 12) = \frac{1}{\cancel{12}} \times \frac{\cancel{12} \times 13}{2} = \frac{13}{2} \text{ car } 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit Y la variable aléatoire associée à la valeur de la face supérieure du dé à 6 faces. On

sait que $E(Y) = \frac{3}{2}$.

La variable aléatoire associée à la somme des trois dés est donc :

$$Y + Y + X + X + X = 3X + 2Y.$$

Finalement, par linéarité de l'espérance,

$$E(3X + 2Y) = 3E(X) + 2E(Y) = \frac{13}{2} \times 3 + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{45}{2}.$$