Compléments sur la dérivation

I. Dérivée des fonctions usuelles

On ne tient pas compte, ici, des ensembles de définition et de dérivation.

Fonction	**Dérivée**
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\dots$	$\dots$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Approximation affine d'une fonction en *a*

On admet que, parmi les droites passant par le point A, la tangente à la courbe en A est celle qui approche le mieux la courbe autour du point A :

On dit que la fonction $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a.

En posant $h=x-a$, on peut dire que la fonction $h \mapsto f(a)+f'(a)\cdot h$ est la meilleure approximation affine de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

Si f est dérivable en a, alors : $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)\cdot h$ lorsque $h \approx 0$.

Concrètement :
Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Exercice :
Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a donné.

1. $f(x)=x^2-x+5$, $a=1$ **2.** $f(x)=x^3-2x$, $a=-1$

III. Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Nous admettrons les théorèmes suivants :

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(k\cdot u)' = k\cdot u' \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k\cdot v'}{v^2} \text{ où } v(x)\neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \text{ où } v(x)\neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

Ainsi, la somme de fonctions dérivables sur un intervalle est dérivable sur cet intervalle. Il en est de même pour le produit et le quotient.

Par ailleurs, on démontre que toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Il y a donc continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues.

IV. Dérivations de fonctions composées

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et g une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, $u(x)$ appartient à J, alors la fonction composée $g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I, on a :

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

ou encore :

$$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$$

Ainsi, la composition de deux fonctions dérivables est dérivable et la composition de deux fonctions continues est continue.

Applications :

u étant une fonction dérivable sur I, on obtient les formules de dérivation suivantes.

Formule	Condition de validité
Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$, $\left(u^n\right)' = n u' u^{n-1}$ $\left(u^2\right)' = 2u'u$; $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$	sur I
Si $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\,\dfrac{u'}{u^{n+1}}$	sur tout intervalle J $\subset$ I sur lequel u ne s'annule pas.
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	sur tout intervalle J $\subset$ I sur lequel $u > 0$.