Compléments sur la dérivation
Exercices

Équations de tangentes

★ **Exercice 11.1**

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a donné.

1. $f(x)=x^4$, $a=0$ **2.** $f(x)=\frac{2}{3}x^3$, $a=1$ **3.** $f(x)=x^2+1$, $a=2$

4. $f(x)=x^5-x^3$, $a=-1$ **5.** $f(x)=x^2-2x+3$, $a=\frac{3}{2}$

Correction :

1. $f'(x)=4x^3$

- $f(0)=0^4=0$
- $f'(0)=4\times 0^3=0$
- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$\Leftrightarrow \quad y=0(x-0)+0$$
$$\Leftrightarrow \quad y=0$$

2. $f'(x)=\frac{2}{3}\times 3x^2=2x^2$

- $f(1)=\frac{2}{3}\times 1^3=\frac{2}{3}$
- $f'(1)=2\times 1^2=2$
- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$\Leftrightarrow \quad y=2(x-1)+\frac{2}{3}=2x-2+\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad y=2x-\frac{4}{3}$$

3. $f'(x)=2x$

- $f(2)=2^2+1=5$
- $f'(2)=2\times2=4$
- Une équation de la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 2 est :

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y=4(x-2)+5=4x-8+5$$

$$\Leftrightarrow \quad y=4x-3$$

4. $f'(x)=5x^4-3x^2$

- $f(-1)=(-1)^5-(-1)^3=-1-(-1)=-1+1=0$
- $f'(-1)=5(-1)^4-3(-1)^2=5\times1-3\times1=5-3=2$
- Une équation de la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse -1 est :

$$y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y=2(x+1)+0$$

$$\Leftrightarrow \quad y=2x+2$$

5. $f'(x)=2x-2$

- $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\times\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{4}-3+3=\dfrac{9}{4}$
- $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=2\times\dfrac{3}{2}-2=3-2=1$
- Une équation de la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est :

$$y=f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y=1\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{4}=x-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=x-\frac{6}{4}+\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=x+\frac{3}{4}$$

Dérivées de fonctions usuelles

★ Exercice 11.2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5$ **2.** $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ **3.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 + \sqrt{x}$

Correction :

1. $f'(x) = 7 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 0 = 21x^2 - 4x$

2. $f'(x) = -3 \times 4x^3 + 4 \times 3x^2 + 7 \times 2x - 2 \times 1 + 0 = -12x^3 + 12x^2 + 14x - 2$

3. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

4. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Dérivée d'un produit $\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$

★ Exercice 11.3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)(x+2)$ **2.** $f(x) = (-x+1)(2x-3)$ **3.** $f(x) = x\sqrt{x}$

Correction :

1. $(uv)' = u'v + v'u$ (avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x+2$)

$f'(x) = (2)(x+2) + (1)(2x+1) = 2x + 4 + 2x + 1 = 4x + 5$

2. $(uv)' = u'v + v'u$ (avec $u(x) = -x+1$ et $v(x) = 2x-3$)

$f'(x) = (-1)(2x-3) + (2)(-x+1) = -2x + 3 - 2x + 2 = -4x + 5$

3. $(uv)' = u'v + v'u$ (avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$)

$$f'(x) = (1)(\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Finalement : $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

Dérivée d'une fonction inverse $\boxed{\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k \cdot v'}{v^2}}$

★ **Exercice 11.4**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{2x^3}$ **3.** $f(x) = -\dfrac{3}{x^2+1}$

Correction :

1. $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k\,v'}{v^2}$ (avec $k = 2$ et $v(x) = x+1$)

$$f'(x) = -\frac{2\times 1}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

2. $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k\,v'}{v^2}$ (avec $k = 1$ et $v(x) = 2x^3$)

$$f'(x) = -\frac{1\times 6x^2}{\left(2x^3\right)^2} = -\frac{6x^2}{4x^6} = -\frac{3}{2x^4}$$

3. $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k\,v'}{v^2}$ (avec $k = -3$ et $v(x) = x^2+1$)

$$f'(x) = -\frac{-3\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Dérivée d'un quotient $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$

★ **Exercice 11.5**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ **2.** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **3.** $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+4}$

Correction :

1. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ (avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x+2$)

$$f'(x) = \frac{(1)(x+2)-(1)(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

2. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ (avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = x+1$)

$$f'(x) = \frac{(1)(x+1)-(1)(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ (avec $u(x) = x-3$ et $v(x) = 2x+4$)

$$f'(x) = \frac{(1)(2x+4)-(2)(x-3)}{(2x+4)^2} = \frac{2x+4-2x+6}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}$$

Dérivée d'une composée $\boxed{\left(u^n\right)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}}$ $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

★ Exercice 11.6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \left(x^2+3x+1\right)^4$ **2.** $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ **3.** $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^3-1\right)^2}$

Correction :

1. $\left(u^4\right)' = 4u'u^3$ (avec $u(x) = x^2+3x+1$)

$$f'(x) = 4(2x+3)\left(x^2+3x+1\right)^3$$

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (avec $u(x) = x^2+x+1$)

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

3. Deux écritures de formules possibles : $\left(\dfrac{1}{u^2}\right)' = -\dfrac{2u'}{u^3}$ ou $\left(u^{-2}\right)' = -2u'u^{-3}$

$$f'(x) = \frac{-2\left(3x^2\right)}{\left(x^3-1\right)^3} = \frac{-6x^2}{\left(x^3-1\right)^3}$$

Florilège

★ Exercice 11.7

Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, limites, dérivées, tableau de variations et allure de courbe).

1. $f(x)=-2x^2+5x-4$ **2.** $f(x)=2x^3+2x-4$ **3.** $f(x)=\left(x^2-1\right)^2+5$

4. $f(x)=\dfrac{2x-5}{3x-2}$ **5.** $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-2}$ **6.** $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$ **7.** $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

Correction :

1. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est un polynôme, donc *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

② ***Limites :*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty$.

③ ***Dérivée :*** $f'(x)=-4x+5$.

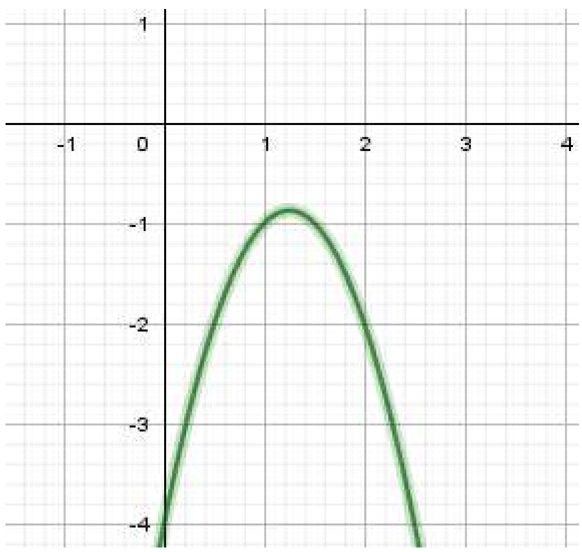
④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

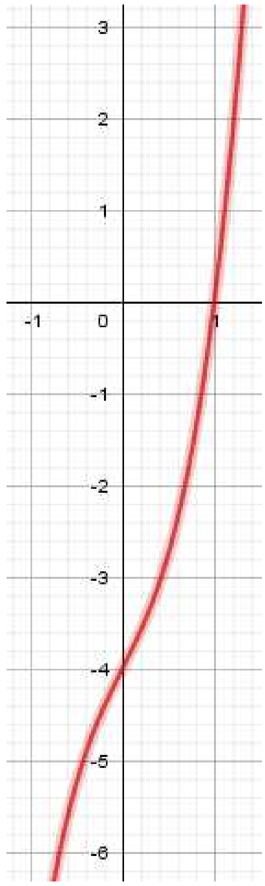
$-4x+5\geq 0 \Leftrightarrow -4x\geq -5 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{5}{4}$. On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$signe.de.f'(x)$		$+$	0	$-$	
$variations.de.f$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{5}{4})$	$\searrow$	$-\infty$

$$f\left(\frac{5}{4}\right)=-2\times\left(\frac{5}{4}\right)^2+5\times\left(\frac{5}{4}\right)-4=-2\times\frac{25}{16}+5\times\frac{5}{4}-4=-\frac{25}{8}+\frac{25}{4}-4=\frac{-25+50-32}{8}=-\frac{7}{8}.$$

⑤ ***Allure de la courbe :***





2. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est un polynôme, donc *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

② ***Limites :*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

③ ***Dérivée :*** $f'(x) = 6x^2 + 2$.

④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

$f'(x) \geq 0$ comme somme de deux termes positifs. On en déduit :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$signe.de.f'(x)$	$+$
$variations.de.f$	$-\infty \nearrow +\infty$

⑤ ***Allure de la courbe :***

3. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est un polynôme, donc *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

② ***Limites :*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2\right)^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

③ ***Dérivée :*** $\left(u^2+5\right)' = 2u'u + 0$, donc $f'(x) = 2(2x)\left(x^2-1\right) + 0 = 4x\left(x^2-1\right)$.

④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

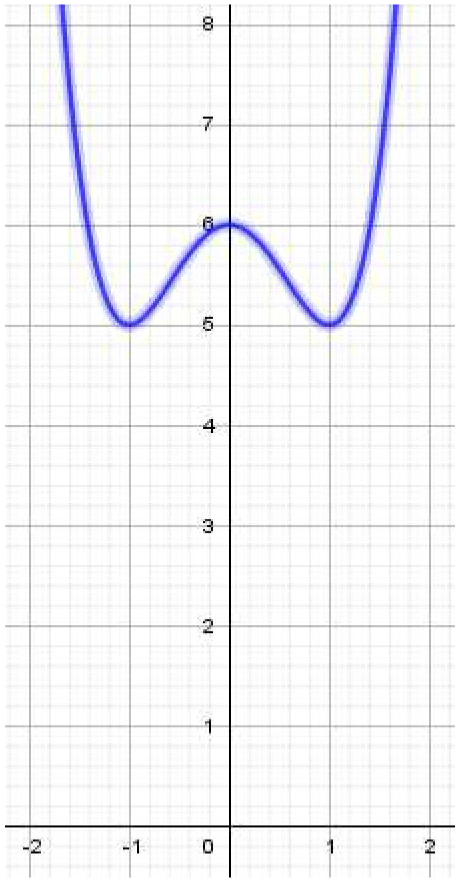
- $4 > 0$
- Le signe de x est connu comme signe de fonction de référence.
- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont les racines évidentes sont – 1 et 1. $x^2 - 1$ est du signe de 1 à l'extérieur des racines.

On en déduit :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$signe.de.f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$variations.de.f$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = \left((-1)^2 - 1\right)^2 + 5 = 5$, $f(0) = \left(0^2 - 1\right)^2 + 5 = 6$ et $f(1) = \left(1^2 - 1\right)^2 + 5 = 5$.

⑤ ***Allure de la courbe :***



4. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est une fonction rationnelle définie si son dénominateur est différent de zéro.

$3x-2=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

f est définie sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}\ ;+\infty\right[$.

② ***Limites :***

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

La droite d'équation $y=\dfrac{2}{3}$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

La droite d'équation $y=\dfrac{2}{3}$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

Étudions le signe du dénominateur :

$3x-2\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{2}{3}$, donc :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $+\infty$
$signe.de.3x-2$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} 2x-5=2\times\frac{2}{3}-5=\frac{4}{3}-5=\frac{4}{3}-\frac{15}{3}=-\frac{11}{3}\\ \displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} 3x-2=0^-\end{array}\right\}\text{par quotient de limites, } \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} f(x)=+\infty\ .$$

La droite d'équation $x=\dfrac{2}{3}$ est asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} 2x-5=-\frac{11}{3}\\ \displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} 3x-2=0^+\end{array}\right\}\text{par quotient de limites, } \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} f(x)=-\infty\ .$$

③ ***Dérivée :***

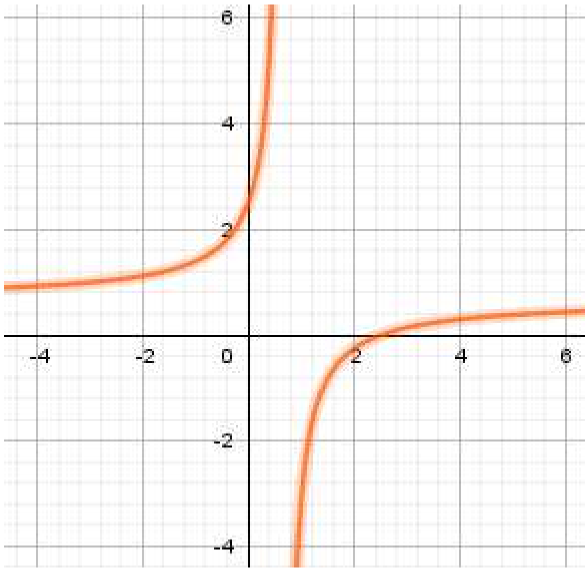
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\text{, donc } f'(x)=\frac{(2)(3x-2)-(3)(2x-5)}{(3x-2)^2}=\frac{6x-4-6x+15}{(3x-2)^2}=\frac{11}{(3x-2)^2}$$

④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

$f'(x)\geq 0$ car un carré est toujours positif. On en déduit :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$signe.de.f'(x)$	$+$	||	$+$
$variations.de.f$	$\frac{2}{3}$ ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ $\frac{2}{3}$

⑤ ***Allure de la courbe :***



5. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est une fonction rationnelle définie si son dénominateur est différent de zéro.

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. *f* est définie sur $]-\infty\ ;2[\cup]2\ ;+\infty[$.

② ***Limites :***

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

Étudions le signe du dénominateur :

$x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$, donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$signe.de.x-2$		$-$	0	$+$	

On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} x^2-x+2=4-2+2=4\\ \lim\limits_{x\to2^-} x-2=0^-\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par quotient de limites,}\\ \quad\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty\end{array}.$$

La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} x^2-x+2=4-2+2=4\\ \lim\limits_{x\to2^+} x-2=0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par quotient de limites,}\\ \quad\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty\end{array}.$$

③ ***Dérivée :***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{, donc} \quad f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2)-(1)\left(x^2-x+2\right)}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x-2}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

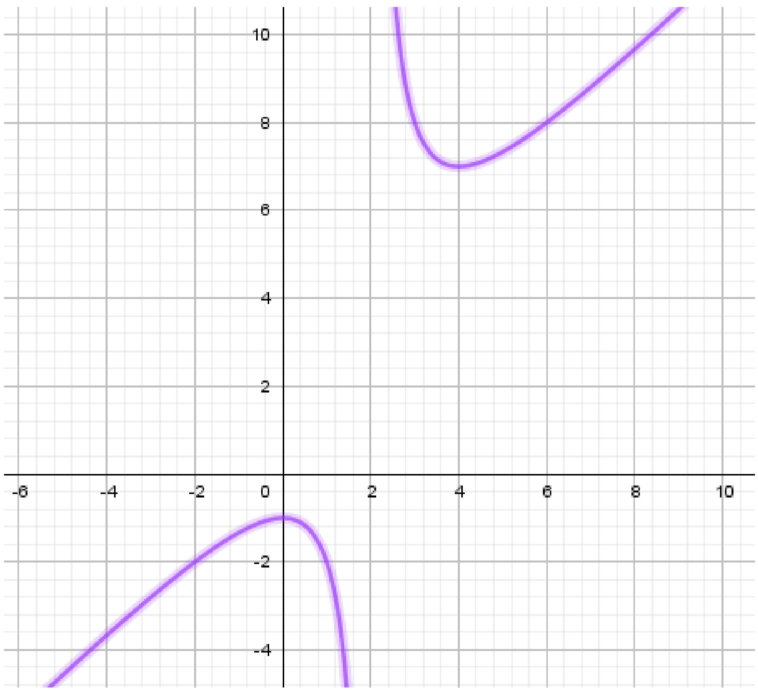
- Le signe de x est connu comme signe de fonction de référence.
- $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$
- $(x-2)^2 > 0$ car un carré est toujours positif.

On en déduit :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x		$-$		$+$	‖	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$signe.de.f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$variations.de.f$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = \frac{0^2-0+2}{0-2} = -1 \text{ et } f(4) = \frac{4^2-4+2}{4-2} = 7.$$

⑤ ***Allure de la courbe :***



6. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est définie à l'aide d'une racine carrée. Il faut donc que l'expression sous la racine soit positive ou nulle.

Déterminons le signe de x^2-3x+5.

$(-3)^2-4\times1\times5=9-20<0$.

Ainsi, $x^2-3x+5>0$ sur $\mathbb{R}$ et *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

② ***Limites :***

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par composée de limites,}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{array}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par composée de limites,}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{array}.$$

③ ***Dérivée :*** $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$.

④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

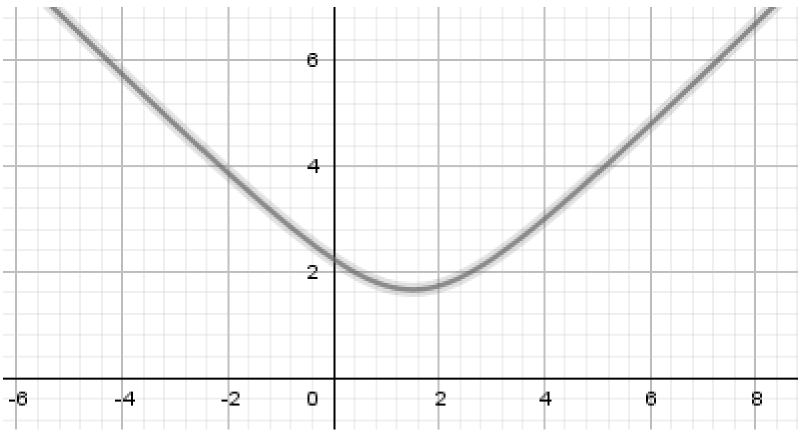
$2\sqrt{x^2-3x+5}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x-3$.

$2x-3\geq0\Leftrightarrow 2x\geq3\Leftrightarrow x\geq\dfrac{3}{2}$. On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$signe.de.f'(x)$		$-$	0	$+$	
$variations.de.f$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{3}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times\frac{3}{2}+5}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+5}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{18}{4}+\frac{20}{4}}=\sqrt{\frac{11}{4}}.$$

⑤ ***Allure de la courbe :***



7. ① ***Ensemble de définition :*** *f* est une fonction rationnelle définie si son dénominateur est différent de zéro.

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. *f* est définie sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$.

② ***Limites :***

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$. Le dénominateur $(x-1)^2$ est donc toujours positif.

On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)^2=4\\ \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^2=0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par quotient de limites,}\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty\end{array}.$$

La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe de *f*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)^2=4\\ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^2=0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par quotient de limites,}\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty\end{array}.$$

③ ***Dérivée :***

Deux formules sont « imbriquées » :

$\left(w^2\right)'=2w'w$ avec $w=\dfrac{u}{v}$ et $w'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$$f'(x)=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\times\frac{(1)(x-1)-(1)(x+1)}{(x-1)^2}\times\frac{(x+1)}{(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=2\times\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\times\frac{(x+1)}{(x-1)}=2\times\frac{-2}{(x-1)^2}\times\frac{(x+1)}{(x-1)}=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

④ ***Signe de la dérivée et variations de la fonction :***

- $-4<0$
- $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$
- Comme $(x-1)^3=(x-1)^2\times(x-1)$, $(x-1)^3$ est du signe de $x-1$.

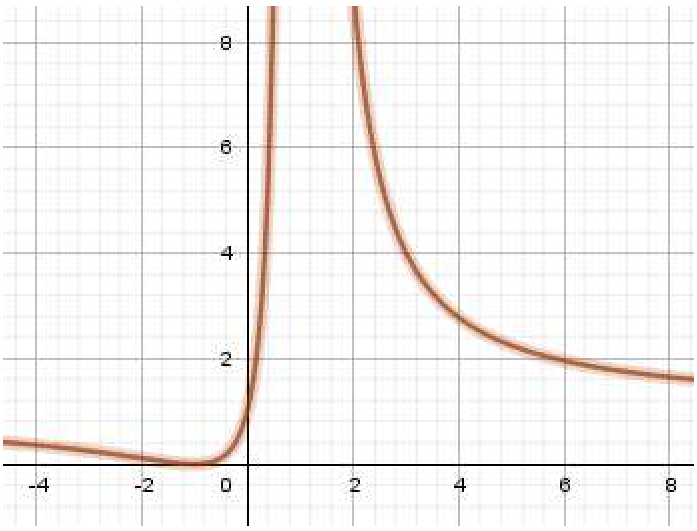
  $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

On en déduit :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
-4		$-$	|	$-$	||	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	|	$-$	||	$+$	
$signe.de.f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	
$variations.de.f$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

$$f(-1)=\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right)^2=0.$$

⑤ ***Allure de la courbe :***



★ Exercice 11.8

f est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

(unités graphiques : 4 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées)

1. Étudier les limites de *f* en 1 et en $+\infty$.

2. a) Démontrer que la dérivée de *f* est $f'(x)=\dfrac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$.

b) En déduire les variations de *f*.

3. Donner l'allure de $\mathcal{C}$.

Correction :

1. 1 est une valeur interdite. Étudions le signe du dénominateur.

$x^2-1=(x-1)(x+1)$. Donc 1 et -1 sont racines évidentes.

x^2-1 est donc positif à l'extérieur des racines. En particulier, sur $]1\,;+\infty[$, $x^2-1\geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 1} x^4=1\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1=0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient de limites,}\\ \quad\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\end{array}$$

En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

2. a) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$$f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-1)-(2x)(x^4)}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^5-4x^3-2x^5}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^5-4x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$$

b) Étudions le signe de $f'(x)$:

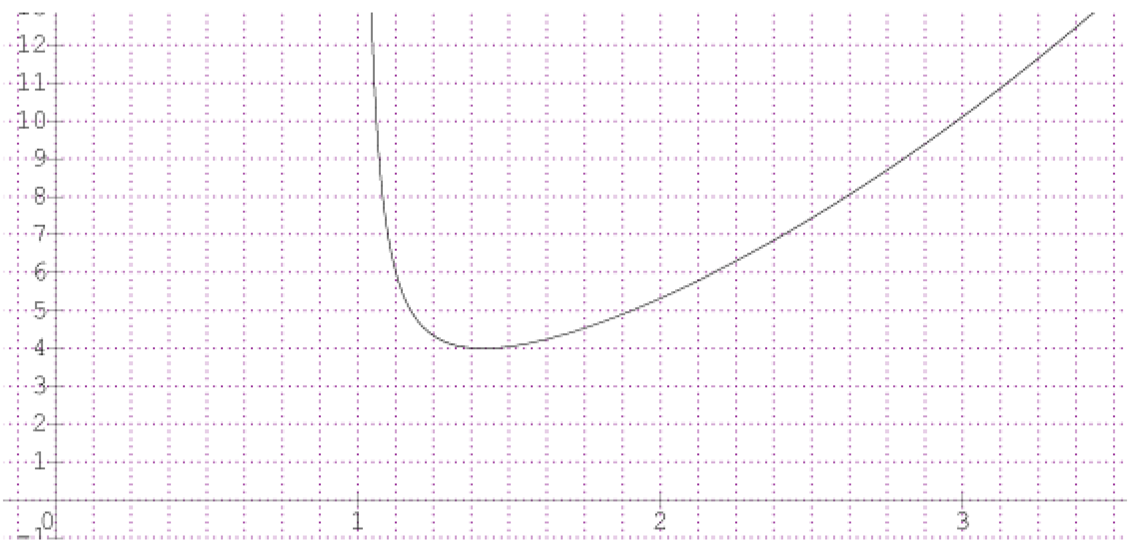
- $(x^2-1)^2\geq 0$ car un carré est toujours positif
- $2x^3\geq 0$ car $x\in\,]1\,;+\infty[$
- x^2-2 est un trinôme du second degré qui a pour racines évidentes $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
  Il est donc positif à l'extérieur des racines.

On en déduit :

x	1		$\sqrt{(2)}$		$+\infty$
$(x^2-1)^2$		$+$	|	$+$	
$2x^3$		$+$	|	$+$	
x^2-2		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{(2)})$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{4}{2-1}=4\,.$$

3.



★ Exercice 11.9

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis montrer que α est compris entre 1 et 2.

d) En déduire le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

(On pourra se servir d'un résultat de la question 1).

Correction :

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$.

b) $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$g'(x)$ est un trinôme du second degré qui a pour racines évidentes 0 et 1.

Il est donc positif à l'extérieur des racines.

On en déduit :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0)=2\times0^3-3\times0^2-1=-1$ et $g(1)=2\times1^3-3\times1^2-1=2-3-1=-2$

c) Il y a deux questions en une : on va d'abord montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α puis on va montrer que α est compris entre 1 et 2.

Sur $]-\infty\,;1]$, -1 est maximum. Donc l'équation $g(x)=0$ ne possède pas de solution sur $]-\infty\,;1]$.

- g est continue sur $[1\,;+\infty[$;
- g est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$;
- $0\in g([1\,;+\infty[)=[-2\,;+\infty[$;

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ possède une seule solution sur $[1\,;+\infty[$.

En définitive, l'équation $g(x)=0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.

De plus, $g(1)=-2$ et $g(2)=2\times2^3-3\times2^2-1=16-12-1=3$. Donc $\alpha\in[1\,;\,2]$.

d) On déduit le signe de g d'après son tableau de variation et ce qui précède :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^2}=0$.

Étudions le signe de $1+x^3$:

$1+x^3\geq0\Leftrightarrow x^3\geq-1\Leftrightarrow x\geq-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1+x^3$		$-$	0	$+$	

Dès lors :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to-1} 1-x=2\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-1^+} 1+x^3=0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient de limites,}\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to-1} 1-x=2\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-1^-} 1+x^3=0^-\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient de limites,}\\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty\end{array}$$

b) Calculons $f'(x)$ et étudions son signe. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$$f'(x)=\frac{(-1)(1+x^3)-(3x^2)(1-x)}{(1+x^3)^2}=\frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2}=\frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2}=\frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

- $(1+x^3)^2\geq0$ car un carré est toujours positif
- $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$

On en déduit :

x	$-\infty$		-1		α		1
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0