Compléments d'analyse

I. Fonction valeur absolue

1. Définition

La valeur absolue d'un réel x est le nombre noté $|x|$ qui est égal au nombre x si x est positif, et au nombre $-x$ si x est négatif.

Autrement dit, $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

Exemples :

- $|5| = 5$ car $5 > 0$.

- $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$.

- $|2-t| = \begin{cases} 2-t \text{ si } 2-t \geq 0, \text{c'est-à-dire si } t \leq 2 \text{ ;} \\ t-2 \text{ si } 2-t \leq 0, \text{c'est-à-dire si } t \geq 2. \end{cases}$

Remarques :

- Une valeur absolue est toujours positive : pour tout réel x, $|x| \geq 0$.
- Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout réel x, $|x| = |-x|$.
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

La distance entre deux réels x et y est la distance entre les points d'abscisses x et y sur la droite réelle munie d'un repère $(O \,;\, \vec{i})$. On la note $d(x \,;\, y)$.

Pour tous réels x et y, on a :

$d(x \,;\, 0) = |x|$ et $d(x \,;\, y) = |x - y|$.

2. Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$.

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Tableau de variations & courbe représentative.

Propriétés :
Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. Une application au calcul de la limite de (b^n)

À retenir : $\boxed{|b|<1 \Leftrightarrow -1<b<1}$

Si $|b|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.
Si $b>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.
Si $b=1$, $b^n=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 1$.
Que peut-on dire si $b\leq 1$?

On pourra écrire par exemple tout aussi bien « $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,2)^n=0$ car $-1<-0,2<1$ » que « $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,2)^n=0$ car $|-0,2|<1$ ».

II. Limites et ordre

f, *g*, *h* désignent des fonctions, *l* et l' deux réels, et *a* un réel ou +∞ ou -∞.

1. Compatibilité avec l'ordre

Soient *f* et *g* deux fonctions telles que $f(x)\leq g(x)$ sur un intervalle et soient $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$, alors $l\leq l'$.

2. Théorème des “gendarmes”

Si $g \leq f \leq h$ et si $\lim_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim_{x \to a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Cas particulier : si $\forall x$, $|f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

3. Autre théorème de comparaison

- Si $f \leq g$ et $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $f \leq g$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.