Compléments d'analyse
Exercices

Valeur absolue

★ Exercice 12.1

Calculer : *rappel* $\sqrt{2} \simeq 1,4$

1. $|3,2|$ **2.** $|-1,5|$ **3.** $|2-\sqrt{2}|$ **4.** $|1-\sqrt{2}|$

Correction :

1. $|3,2| = 3,2$

2. $|-1,5| = 1,5$

3. $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$ car $2-\sqrt{2} \geq 0$

4. $|1-\sqrt{2}| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = -1+\sqrt{2}$ car $1-\sqrt{2} \leq 0$

★ Exercice 12.2

Trouver tous les entiers relatifs x tels que : $|x| \leq 6$.

Correction :

$x \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;\ 0\ ;1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$. On note plus simplement : $x \in [\![-6\ ;\ 6]\!]$.

Limite de $\left(b^n\right)$

★ Exercice 12.3

Déterminer si possible les limites suivantes (une justification est attendue) :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-0,9^n$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\sqrt{2}\right)^n$ **6.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ **7.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3^n}$ **8.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{2n}}{4^n}$

Correction :

Si $|b|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.

Si $b>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2>1$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ car $|0,5|<1$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $|0,9|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-0,9^n = 1$.

5. $-\sqrt{2}<-1$, donc la suite $\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

6. Deux rédactions possibles :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2>1$ donc par inverse de limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$.

8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{2n}}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(3^2\right)^n}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9^n}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{4}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{9}{4}>1$.

Théorèmes de comparaison et théorème d'encadrement

★ Exercice 12.4

Soit la fonction *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et qui vérifie $\forall x\in\mathbb{R}$ l'inégalite : $f(x)\geq x^2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par théorème de comparaison (théorème de minoration, plus exactement), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

★ Exercice 12.5

Soit la fonction *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$ l'inégalite : $f(x) \leq -x$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Correction :

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$. Par théorème de comparaison (théorème de majoration, plus exactement), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

★ Exercice 12.6

Soit la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$, qui admet une limite ℓ quand *x* tend vers $+\infty$, et qui vérifie $\forall x \in [1\,;+\infty[$ l'inégalite : $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$.
Déterminer la limite ℓ.

Correction :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$. Par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
Remarque : ce théorème porte aussi le nom de « théorème des gendarmes »

★ Exercice 12.7

Soit la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$, telle que $\forall x \in \,]0\,;+\infty[$, $1 \leq f(x) \leq 3$.

Soit la fonction *g* définie sur $]0\,;+\infty[$, par $g(x) = \frac{2f(x)+3}{x^2}$.

1. Démontrer que, $\forall x \in \,]0\,;+\infty[$, $\frac{5}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{9}{x^2}$.

2. En déduire la limite de *g* quand *x* tend vers $+\infty$.

Correction :

1. $1 \le f(x) \le 3$

$\Leftrightarrow$ $2 \le 2f(x) \le 6$ (on a multiplié par 2 tous les membres de l'inégalité)

$\Leftrightarrow$ $5 \le 2f(x)+3 \le 9$ (on a ajouté 3 à tous les membres de l'inégalité)

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{5}{x^2} \le \dfrac{2f(x)+3}{x^2} \le \dfrac{9}{x^2}$ (on a divisé par x^2, qui est positif, tous les membres de l'inégalité)

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{5}{x^2} \le g(x) \le \dfrac{9}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{x^2} = 0$. Par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

★ Exercice 12.8

Soit *f* une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, et qui vérifie $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\, : 1 \le f(x) \le 2$.

Déterminer la limite quand *x* tend vers $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$.

Correction :

$1 \le f(x) \le 2$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{2}{x}$ (on a divisé par *x*, qui est positif ici, tous les membres de l'inégalité)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$. Par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.