

**Compléments d'analyse**  
**Exercices**

**Valeur absolue**

★ Exercice 12.1

Calculer : *rappel*  $\sqrt{2} \approx 1,4$

1.  $|3,2|$                       2.  $|-1,5|$                       3.  $|2-\sqrt{2}|$                       4.  $|1-\sqrt{2}|$

★ Exercice 12.2

Trouver tous les entiers relatifs  $x$  tels que :  $|x| \leq 6$ .

**Limite de  $(b^n)$**

★ Exercice 12.3

Déterminer si possible les limites suivantes (une justification est attendue) :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$                       2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n$                       3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$                       4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1-0,9^n$
5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{2})^n$                       6.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}$                       7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n}$                       8.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n}}{4^n}$

**Théorèmes de comparaison et théorème d'encadrement**

★ Exercice 12.4

Soit la fonction  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , et qui vérifie  $\forall x \in \mathbb{R}$  l'inégalité :  $f(x) \geq x^2$ .

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

★ **Exercice 12.5**

Soit la fonction  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , et qui vérifie  $\forall x \in \mathbb{R}$  l'inégalité :  $f(x) \leq -x$ .

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

★ **Exercice 12.6**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$ , qui admet une limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et qui

vérifie  $\forall x \in ]1; +\infty[$  l'inégalité :  $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$ .

Déterminer la limite  $\ell$ .

★ **Exercice 12.7**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$ , telle que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $1 \leq f(x) \leq 3$ .

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$ , par  $g(x) = \frac{2f(x)+3}{x^2}$ .

1. Démontrer que,  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $\frac{5}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{9}{x^2}$ .
2. En déduire la limite de  $g$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

★ **Exercice 12.8**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$ , et qui vérifie  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :  $1 \leq f(x) \leq 2$ .

Déterminer la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$ .