

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les exercices incontournables

Julien Fernandez

Fonctions et Intégration

I. Premières fonctions usuelles

★ Calcul d'images et représentations graphiques :

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $[-2 ; 3]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 1$.

1. Par calcul mental ou par calcul posé, recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

2. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

Exercice 2

Soient la fonction f définie sur $[-1 ; 2]$ par $f(x) = -2(x-1)^2$, et C la courbe associée.

Soient la fonction g définie sur $[-1 ; 2]$ par $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$, et C' la courbe associée.

1. On donne (ou on rappelle) que $0,5^2 = 0,25$ et que $0,5^3 = 0,125$.

Par calcul mental ou par calcul posé, recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$							
$g(x)$							

2. Donner deux points d'intersections de C et C' .

3. Tracer C et C' .

★ Résolutions d'équations :

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 7 = 19$

2. $x - 5 = -2$

3. $0,3x = 6$

4. $-2x = 6$

5. $\frac{x}{9} = 8$

6. $3x + 4 = 12$

7. $\frac{4x-5}{x+4} = 2$

8. $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

9. $2(3x-1) - 5(x-6) = 2$

10. $(x+1)(x+2) = 0$

11. $(2x+1)(4x-3) = 0$

12. $\frac{x+4}{x-1} = 0$

13. $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{5}{4}$

★ Fonctions affines et inéquations :**Exercice 4**

1. Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$.
2. Étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
3. En déduire le signe du produit $(3x - 1)(2x + 1)$.

Exercice 5

1. Étudier le signe du produit $(2x + 3)(2 - 3x)$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $(2x + 3)(2 - 3x) > 0$.

Exercice 6

1. Étudier le signe du quotient $\frac{2x+3}{2-x}$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $\frac{2x+3}{2-x} \leq 0$.

★ Fonctions polynômes du second degré :**Exercice 7**

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$.
2. $2x^2 + x + 2 = 0$.
3. $3x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = 0$.
4. $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Exercice 8

Factoriser, si possible, les fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. $f(x) = 2x^2 + x + 2$.
3. $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$.

Exercice 9

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 75x^2 - 60x + 12.$

2. $f(x) = -2x^2 + x - 1.$

3. $f(x) = -x^2 + 8x - 15.$

II. Étude des variations d'une fonction & Dérivées**★ Dérivées des fonctions usuelles :****Exercice 10**

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 1$

2. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

3. $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

4. $f(x) = -2(x-1)^2$

5. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$

6. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 10$

7. $f(x) = \frac{3}{x+1}$

8. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

9. $f(x) = \frac{x-3}{2x+4}$

Exercice 11

Déterminer le tableau des variations des fonctions 1 à 6 de l'exercice précédent.

III. Limites**★ Opération sur les limites****Exercice 12**

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2.$

2. $f(x) = \frac{4}{x} - 2x^2.$

3. $f(x) = x \left(4 + \frac{2}{x} \right).$

4. $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x} \right)^3.$

★ Limites d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini**Exercice 13**

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions 1 à 6 de l'exercice 10.

Exercice 14

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 2x - 5.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x}{2x^2 + 3}.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 2x + 1}.$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^4 + 1}.$

★ Limites d'une fonction rationnelle en une valeur interdite**Exercice 15**

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2}{x-1}.$

Exercice 16

Déterminer la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x+4}$ sur $] -\infty ; -4[\cup] -4 ; +\infty [$ 2. $f(x) = \frac{2x-5}{-x+2}$ sur $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty [$

3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$ sur $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$ 4. $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

★ Asymptotes horizontales et verticales**Exercice 17**

Déterminer les asymptotes horizontales et verticales aux courbes représentatives des fonctions de l'exercice 16.

★ Théorèmes sur les limites

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$, qui admet une limite l quand x tend vers $+\infty$, et qui

vérifie $\forall x \in [1; +\infty[$ l'inégalité : $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$.

Déterminer la limite l .

IV. Questions « classiques »

★ Déterminer une équation de tangente

Exercice 19

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a donné.

1. $f(x) = x^4$, $a = 0$
2. $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $a = 1$
3. $f(x) = x^2 + 1$, $a = 2$
4. $f(x) = x^5 - x^3$, $a = -1$
5. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = \frac{3}{2}$

★ Équation $g(x) = 0$... ou équation $g(x) = k$, k réel (théorème de la bijection).

Exercice 20

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1 et 2.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

V. Fonctions logarithme et exponentielle

★ Fonction logarithme

Exercice 22

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

$$1. A = \ln(8) \quad 2. B = \ln(2e^3) \quad 3. C = 2\ln(4) - \ln(4e^2)$$

Exercice 23

Résoudre les inéquations suivantes :

$$1. \ln(x+3) > \ln 5 \quad 2. \ln(x) > 1 \quad 3. \ln(x) \leq 2$$

Exercice 24

Calculer les limites suivantes :

1. Opérations classiques (somme, produit, ...) :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$$

$$2. \text{Composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

3. Formes indéterminées :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Exercice 25

Pour chacune des fonctions suivantes :

a) Déterminer les limites aux bornes (fonctions définies sur $]0; +\infty[$ sauf 6. : $]-\infty; 0[$ et 7. $]2; +\infty[$)

b) Déterminer la dérivée

c) Dresser le tableau des variations.

$$1. f(x) = \ln(x) + x \quad 2. f(x) = \ln(x) - x \quad 3. f(x) = \ln(x) - 2x \quad 4. f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2$$

$$5. f(x) = \ln(3x) \quad 6. f(x) = \ln(-x) \quad 7. f(x) = \ln(x-2) \quad 8. f(x) = x \ln(x)$$

$$9. f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad 10. f(x) = x^2 + 1 - 2\ln(x)$$

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$.

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En donner une valeur approchée. *On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$.*
2. a) On souhaite calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Recopier et compléter les pointillés :

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \dots \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0} -2x + 3 = \dots \end{array} \right\} \text{ par } \dots \text{ de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots .$$
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
 b) Déterminer le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau des variations de f .
On fera figurer les limites aux bornes et les valeurs particulières.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.
5. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0; +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
 b) Justifier que $\beta \in]1, 2[$.

Exercice 27

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer la dérivée de g .
 b) En déduire que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
 c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
2. a) Question de cours : donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$. En déduire, en justifiant, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b) Déterminer par le calcul $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$. En déduire, en justifiant, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- c) Calculer la dérivée de f . Vérifier pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- d) Dédire, à l'aide de la question précédente et à l'aide de la question 1 le signe de $f'(x)$ puis le tableau complet des variations de f .
- e) On considère la droite D d'équation $y = x + 1$. Étudier la position relative de C et D.

★ Fonction exponentielle

Exercice 28

Écrire sous la forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

$$1. \frac{e^7}{e^2} \qquad 2. \frac{(e^{-1})^4}{e}$$

Exercice 29

Résoudre les inéquations suivantes :

$$1. e^x > 1 \qquad 2. e^{-x} > 2 \qquad 3. e^{2x} \leq 2$$

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^2) & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) & \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2 + \frac{1}{x}} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) e^{-x} \end{array}$$

Exercice 31

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ sauf 7. : $\mathbb{R}^*$.

Calculer les dérivées de ces fonctions puis étudier le signe de leur dérivée.

$$\begin{array}{llll} 1. f(x) = e^{2x} & 2. f(x) = e^{2x} - 2e^x & 3. f(x) = (e^x - 1)^2 & 4. f(x) = (x + 3)e^{-x} \\ 5. f(x) = x + 4e^{-x} & 6. f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2} & 7. f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} & \end{array}$$

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.

1. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 4$.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
c) Dresser le tableau complet des variations de f .

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{2 + e^x}$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-x}}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 35

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x - 3)e^{-x}$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$).
2. Montrer que $g(x) < 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x + 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2; -1]$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

VI. Primitives des fonctions usuelles

Exercice 37

Déterminer une primitive de chaque fonction proposée :

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

2. $f(x) = 4x^4 - 6x^2 + 3x - 5$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

4. $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{5x^4} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$

Exercice 38

Déterminer une primitive de chaque fonction proposée :

1. $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$

2. $f(x) = e^{-x} + e^{2x} - e^{-3x}$

3. $f(x) = \frac{1}{x+1} + e^{x+3}$

VII. Intégrales

★ Intégrale et primitive :

Exercice 39

Calculer :

$$I_1 = \int_1^3 x \, dx, \quad I_2 = \int_1^2 (x^2 - 2x) \, dx, \quad I_3 = \int_1^e \frac{1}{x} \, dx, \quad I_4 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x} \, dx,$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{1}{x+2} \, dx, \quad I_6 = \int_0^1 (x^3 + x^2 + x + 1) \, dx, \quad I_7 = \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx, \quad I_8 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \, dx,$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$$

★ Relation de Chasles

Exercice 40

Soit f la fonction définie sur $[0, 6]$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Calculer $\int_0^6 f(x) \, dx$

★ Calcul d'intégrales quand une primitive est donnée/suggérée

Exercice 41

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(2x) - x$, est une primitive de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x)$.
2. En déduire la valeur de $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x) dx$.

Exercice 42

On appelle f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2$.

1. Dériver la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x(\ln x)^2$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = \int_e^{e^2} f(x) dx$.

Exercice 43

On considère la fonction f dérivable sur un intervalle $[a, b]$ dont on note $f'(x)$ la dérivée.

L'intégrale $\int_a^b f'(x) dx$ est égale à :

- A. $f'(b) - f'(a)$ B. $F(b) - F(a)$ C. $f(b) - f(a)$ D. On ne peut pas savoir

★ Intégration par parties

Exercice 44

Calculer :

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx, \quad I_2 = \int_0^1 x e^x dx, \quad I_3 = \int_0^1 x e^{-x} dx, \quad I_4 = \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

★ Fonction définie par une intégrale

Exercice 45

Étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$, définie sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \int_1^x \ln t dt$, définie sur $]0, +\infty[$.

★ Intégrales & Suites

Exercice 46

Soit $I_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$ définie pour tout n de $\mathbf{N}$.

Calculer I_0 puis I_n pour tout n de $\mathbf{N}^*$. $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 47

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ définie pour tout n de $\mathbf{N}^*$.

1. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.
2. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 48

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ définie pour tout n de $\mathbf{N}$.

1. Calculer I_0 , I_1 puis montrer que pour tout n de $\mathbf{N}$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
2. Calculer I_2 et I_3 . En déduire l'intégrale $K = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} dx$.

★ Intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ **Exercice 49**

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; +\infty [$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? En 1 ?
2. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 50

Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Exercice 51

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Suites

★ Calculs de termes

Exercice 52

1. La suite (u_n) est définie par tout n par : $u_n = 3^n - 2^n$. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$, et pour tout n par : $v_{n+1} = 2v_n - 5$. Calculer v_1 et v_2 .
3. La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$, et pour tout n par : $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + n - 2$.
Calculer w_1 et w_2 .

★ Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 53

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de terme initial $u_0 = 3$. Calculer u_{50} .
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $u_1 = -7$. Calculer u_{103} .
3. La suite (u_n) est arithmétique, de raison $-\frac{2}{3}$ et telle que $u_9 = 7$. Calculer u_0 .
4. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 6$ et $u_{35} = -3$. Calculer sa raison.

Exercice 54

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = (n+1)^2 - n^2 + 7$.

Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 . Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 55

Calculer les sommes suivantes :

1. $1 + 2 + 3 + \dots + 1\,000$
2. $101 + 102 + \dots + 200$

Exercice 56

1. On considère la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de terme initial $u_0 = 2$. Calculer u_{10} .
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et de terme initial $v_1 = 64$. Calculer v_{10} .
3. La suite (u_n) est géométrique, de raison $0,5$ et telle que $u_6 = 0,1875$. Calculer u_1 .
4. Soit (v_n) la suite géométrique de raison négative, de terme initial $v_1 = 2$ et telle que $v_5 = 162$. Calculer sa raison.

Exercice 57

Calculer les sommes suivantes :

1. $1 + 2 + 4 + \dots + 4\,096$
2. $3 + 9 + \dots + 3^{10}$

Exercice 58

Dans cet exercice, on considère deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 2 \end{cases}.$$

1. Calculer x_1 et y_1 .
2. On introduit la suite (r_n) définie par $r_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n .
 - a) Prouver que la suite (r_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n .
3. On introduit la suite (s_n) définie par $s_n = x_n + y_n$ pour tout entier naturel n .
 - a) Calculer $s_{n+1} - s_n$. Quelle est la nature de la suite (s_n) .
 - b) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n .
4. Déduire des questions précédentes l'expression de x_n en fonction de n .

★ Suites arithmético-géométriques**Exercice 59**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de u_n et la limite de u .

1. $u_0 = 0, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$.
2. $u_1 = 1, u_{n+1} = 0,2u_n + 0,2$.

★ Démonstration par récurrence**Exercice 60**

On considère une suite de matrices de matrice initiale X_0 définie par $X_{n+1} = AX_n$.

Démontrer que $X_n = A^n X_0$.

Exercice 61

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - e^{-x}$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

Matrices

I. Calculs matriciels**Exercice 62**

On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A+B$, $2A$, $-3B$, $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 63

On donne : $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$.

II. Inverse d'une matrice

★ La réponse est donnée (ou presque...)

Exercice 64

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$. Conclure.

Exercice 65

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $C \times D$. Conclure.

★ Cas des matrices 2×2 :

Exercice 66

Déterminer, directement, les matrices inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

★ Matrice inverse et polynôme annulateur :

Exercice 67

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer directement A^{-1} .
2. a) Donner, sans justification, un polynôme annulateur de A .
 b) À l'aide du polynôme annulateur, montrer que A est inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A puis calculer A^{-1} .

Exercice 68

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

★ Matrice inverse par résolution de système

Exercice 69

Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

★ Matrice inverse par pivot de Gauss

Exercice 70

Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

★ Matrices non inversibles

Exercice 71

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Conclure.

Exercice 72

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Montrer que, si A est inversible, alors $A^2 - 3A + 2I = 0$.
3. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. Conclure.

III. Puissance n -ième d'une matrice

★ Calcul immédiat

Exercice 73

On donne $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner, sans justification D^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Le démontrer par récurrence.

★ La réponse est donnée

Exercice 74

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

★ Puissance n -ième à l'aide de suites

Exercice 75

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ où (a_n) est la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.
2. Calculer a_n . En déduire A^n .

Exercice 76

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{20} N$.

On pose $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

1. Vérifier que $AB = BA = O$. En déduire que $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.
2. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = \frac{1}{8}$, $b_0 = -\frac{1}{8}$ et les relations :

$$a_{n+1} = 12a_n \text{ et } b_{n+1} = 4b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $N^n = a_n A + b_n B$.
- b) Quel est le type des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Déterminer, pour tout entier naturel n , des expressions de a_n et de b_n en fonction de n .

- c) Montrer que : $M^n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^n B$ pour tout entier naturel n .

★ À l'aide d'un polynôme annulateur

Exercice 77

On considère les matrices à coefficients réels A , B et C définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC et CB .
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :

$$B^n = B, \quad C^n = (-1)^{n-1} C.$$

3. Vérifier que l'on a :

$$A^2 = 5A - 6I$$

où I est la matrice carrée d'ordre 2.

4. Établir que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I .
 5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$A^n = 3^n B - 2^n C.$$

La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$, c'est-à-dire a-t-on :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C ?$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$(A^{-1})^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

Exercice 78

On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.
 2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3 .
 3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence :

$$u_0 = 0 ; v_0 = 1 ; u_{n+1} = -u_n + v_n ; v_{n+1} = 2u_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = u_n A + v_n I_3$.

4. a) On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $x_n = 1$.
 b) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$. Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n .
 c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \right] A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \right] I_3$

6. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

★ Puissance n -ième et formule du binôme de Newton

Exercice 79

Rappeler la formule $(a+b)^n$. Développer $(x+1)^3$.

Exercice 80

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice $N = A - I$, puis calculer N^2 puis N^3 .
Sans récurrence, donner la valeur de N^k lorsque $k \geq 3$.
2. Montrer alors en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette formule est-elle encore valable lorsque $n = 0$? lorsque $n = 1$?

3. a) Par la méthode du pivot, justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
b) La formule de la question 2. est-elle encore valable lorsque $n = -1$?

Exercice 81

On considère les matrices carrées A , I , O et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 3I.$$

1. a) Calculer B , B^2 , B^3 .
b) En déduire B^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right). \text{ Est-ce encore vrai pour } n \in \{0, 1\} ?$$

Exercice 82

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A^n \text{ pour } n \geq 2.$$

★ Puissance n -ième à l'aide d'une matrice diagonale**Exercice 83**

On définit les trois matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Inverse de P . Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calcul de A^n . On pose $B = P^{-1}AP$.
 - a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie).
 - b) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n .
 - c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 0, A^n = PB^nP^{-1}$ puis donner les quatre coefficients de la matrice A^n .

Exercice 84

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12.1. Calcul des puissances de M .

1. Déterminer l'expression de D^n , pour tout entier naturel n non nul.
2. Calculer PQ . En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} , sous forme d'un tableau de nombres.
3. Calculer le produit $P^{-1}MP$.
4. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = PD^nP^{-1}$.
5. Écrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

12.2. Suites définies par une relation de récurrence.

On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{2} \\ w_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel n , on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n .
2. a) En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n , supérieur ou égal à 1.
 b) À l'aide des résultats obtenus en 12.1.5, déterminer alors l'expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .
 c) Déterminer les limites des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

IV. Réduction des matrices carrées**★ Matrices carrées diagonalisables :****Exercice 85**

On donne : $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \times P$ puis $P \times D$. Que peut-on en déduire pour A ?
2. Donner une expression de A^n en fonction de P et D .

★ Valeur propre et vecteur propre d'une matrice

Exercice 86*Valeurs propres possibles d'une matrice.*

1. On donne $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A . En déduire les valeurs propres possibles de A .

2. On donne : $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .

Exercice 87*Reconnaissance de vecteurs propres.*

Dans chaque cas, on donne une matrice A et une matrice P . Vérifier que la matrice P est obtenue en juxtaposant des vecteurs colonnes qui sont des vecteurs propres de A .

Préciser pour chacun les valeurs propres possibles de la matrice A .

1. $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 88*Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A . En déduire les valeurs propres possibles de A .
2. Déterminer les vecteurs propres de A .
3. En déduire une matrice D et une matrice P telles que $A \times P = P \times D$.
4. Soit n un entier naturel. Calculer A^n .

Exercice 89

Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres.

On considère le polynôme $Q : X^3 + X^2 - 10X + 8$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a)** Montrer que 1 est racine évidente de Q .
b) Factoriser Q sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.
c) En déduire toutes les racines de Q .
2. Montrer que $Q(A) = O$.
3. En déduire les valeurs propres possibles de A .
4. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 90

On considère le polynôme $Q : X^3 - 10X^2 + 32X - 32$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est diagonalisable puis calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Probabilités

I. Généralités

Exercice 91

On donne $p(A) = 0,2$; $p(B) = 0,5$; $p(A \cup B) = 0,6$. Que vaut $p(A \cap B)$?

Exercice 92

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie. On note, à chaque lancer, quelle est la face visible, c'est-à-dire soit PILE noté P, soit FACE, notée F.

On obtient ainsi une suite de trois lettres.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement A : "Obtenir deux P".
2. Quelle est la probabilité de l'évènement B : "Obtenir au moins un F".

Exercice 93

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule.

1. Quelle est la probabilité que la somme des nombres tirés soit égale à 7 ?
2. Quelle est la probabilité que le plus grand des numéros tirés soit au plus égal à 3.

II. Dénombrements

Exercice 94

1. On tire successivement avec remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On tire successivement sans remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
3. On tire simultanément 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

Exercice 95

1. Donner la valeur des expressions suivantes : $\binom{12}{8}$, $\binom{5}{4}$
2. Exprimer en fonction de n , et sans factorielle, le nombre : $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{2}$.
3. Calculer les nombres suivants :

$$A = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} \quad ; \quad B = \binom{15}{1} + \binom{4}{3}$$

III. Probabilités conditionnelles

★ Événements indépendants :

Exercice 96

- On donne $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ et $p(\overline{A \cup B}) = 0,35$. Calculer $p(A \cap B)$.
- On donne $p(A) = 0,2$; $p(B) = 0,6$; $p(A \cup B) = 0,7$.
Calculer $p(A \cap B)$, $p_B(A)$ et $p_A(B)$.
- On donne $p(A) = 0,8$; $p(B) = 0,3$; $p(A \cup B) = 0,86$.
Calculer $p_B(A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- On donne $p(B \cap A) = \frac{1}{6}$; $p_A(B) = \frac{1}{4}$. Calculer $p(A)$.

★ Arbre à calculs et formule des probabilités totales

Exercice 97

Une entreprise fabrique des appareils électroniques en grande quantité.

On admet que 10 % des appareils présentent un défaut.

On contrôle des appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90 % des appareils avec défaut et accepte 80 % des appareils sans défaut. On prélève un appareil au hasard dans le lot.

On considère les événements suivants : D : « l'appareil a un défaut » ; A : « l'appareil est accepté à l'issue du contrôle ».

- Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
 - Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(D), \quad P(\overline{D}), \quad P_D(\overline{A}), \quad P_D(A), \quad P_{\overline{D}}(A).$$

- Calculer $P(A \cap D)$.
- Démontrer que $P(A) = 0,73$.
- Calculer la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Exercice 98

Trois machines à fabriquer des comprimés, A , B et C , produisent respectivement 50, 30 et 20% du nombre total de comprimés fabriqués dans une industrie pharmaceutique. Les pourcentages de comprimés défectueux de ces machines sont respectivement 3, 4 et 5 %.

- Si on prend un comprimé au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux ?
- Quelle est la probabilité pour qu'un comprimé défectueux pris au hasard, ait été produit par la machine A ?

Exercice 99

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $3/4$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $1/4$.

Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose ;
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

Pour une plante donnée, on note p_n la probabilité de l'événement R_n « la plante donne une fleur rose la n -ième année ».

1. a) Que vaut p_1 ?

b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :

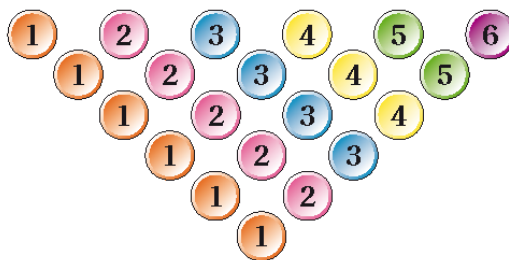
$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2}.$$

2. En déduire p_n ainsi que la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

IV. Lois de probabilités discrètes**★ Variable aléatoires discrètes finies****Exercice 100**

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.

On pioche au hasard un jeton du sac.



Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton.

On définit la variable aléatoire X qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

Exercice 101

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

1. Calculer l'espérance de X .
2. Calculer la variance de X puis l'écart-type de X .
3. On considère la variable aléatoire Y telle que $Y = 3X + 1$.
Déduire des questions 1. et 2. $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 102

On considère la variable aléatoire X de loi :

x_i	0	2	4
$p[X = x_i]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = 2X - 3$.
Calculer l'espérance puis la variance de Y .

Exercice 103

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Construire la fonction de répartition F de X .

Exercice 104

Construire la fonction de répartition F de X de l'exercice 102.

★ Variable aléatoires discrètes infinies

Exercice 105*Séries*

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$
10. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

Exercice 106

Démontrer que la loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, p(X = k) = \frac{3}{4^k}$, est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

V. Lois de probabilités usuelles discrètes**Exercice 107**

On jette 180 fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Donner $X(\Omega)$ puis, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
3. Quelles sont les valeurs de l'espérance mathématique et de l'écart-type du "chiffre 6" ?

Exercice 108

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification, la livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On a constaté que 10% des appareils présentent un défaut.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils ayant un défaut de ce prélèvement.

1. a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
b) Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X = k)$.
c) Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

2. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun appareil n'ait un défaut.
3. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

Exercice 109

En cyclisme, on sait que 20 % des sportifs sont déclarés positifs à l'issue d'un contrôle antidopage. Au cours d'une compétition on fait subir des contrôles à un échantillon de n sportifs choisis au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui mesure le nombre d'individus dont les contrôles sont déclarés positifs.

1. Déterminer la loi de X . Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X ainsi que la valeur de $p(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.
2. Calculer $E(X)$ puis $\sigma(X)$.
3. Calculer la probabilité qu'au moins deux contrôles soient déclarés positifs.

Exercice 110

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification, la livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils sans défaut de ce prélèvement.

Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X = k)$.

Exercice 111

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 112

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

En 2013, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu suivi d'un retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 113

Au cours d'une compétition, on fait subir des contrôles antidopages à un échantillon de 50 sportifs choisis au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui mesure le nombre d'individus dont les contrôles sont déclarés positifs. On admet que X suit la loi de poisson de paramètre 1.

Calculer les probabilités $P(X \leq 2)$, $P(X = 2)$ et $P(X \geq 1)$:

1. En s'aidant de la première table ci-dessous.
2. En s'aidant de la deuxième table ci-dessous.
3. Par calcul direct.

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\sum_{i=0}^k e^{-m} \frac{m^i}{i!}$

k	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,7358	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,9197	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,9810	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,9963	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9994	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9999	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	1,0000	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8		0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9		1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10			0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11			0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12			1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13				0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14				1,0000	0,9998	0,9986	0,9943
15					0,9999	0,9995	0,9976
16					1,0000	0,9998	0,9990
17						0,9999	0,9996
18						1,0000	0,9999
19							1,0000
20							

Table de Poisson donnant les probabilités : $e^{-m} \frac{m^i}{i!}$

k	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071
15					0,0002	0,0009	0,0033
16					0,0000	0,0003	0,0014
17						0,0001	0,0006
18						0,0000	0,0002
19							0,0001
20							

Exercice 114

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude d'un jeu de hasard présent dans une fête foraine. Pour ce jeu, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.

Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N , ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette loi.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N . En déduire la valeur de la variance de Y_N .
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par la loi de Poisson de paramètre 6.
À l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ?
(voir tables exercice 113)
4. Une seconde personne joue jusqu'à ce qu'elle gagne pour la première fois une partie, et s'arrête de jouer. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de parties jouées et T la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.
 - a) Donner la loi de Z .
 - b) Exprimer T en fonction de Z , en déduire l'espérance de T .
5. Pour quelle valeur de N les deux joueurs peuvent-ils espérer le même gain ?

VI. Loi conjointe et couple de variables aléatoires

Exercice 115

On donne :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,3

1. Justifier rigoureusement que $P([Y = 2]) = 0,5$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X puis la loi de probabilité de Y .
3. Calculer $P_{[Y=2]}([X = 0])$.

Exercice 116

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. On considère les var X et Y définies par : X prend la valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon. Y prend la valeur 1 si la seconde boule tirée est blanche, et 0 sinon. Donner la table de la loi conjointe de (X, Y) dans le cas où les tirages se font avec remise, puis dans le cas où les tirages se font sans remise.

Exercice 117

On considère deux variables aléatoires X et Y de loi de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ respectivement. On suppose de plus que $P[X = 0 \cap Y = 0] = \frac{1}{6}$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On pose $U = X + Y$ et $V = X \cdot Y$. Déterminer la loi du couple (U, V) , ainsi que les lois des variables aléatoires U et V . Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 118

1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Soit $Y = X^2$.

Déterminer la loi du couple (X, Y) . En déduire la loi de Y . Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

Que peut-on en conclure ?

2. Mêmes questions avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Exercice 119

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1/20$	$1/4$	0
1	$17/60$	$1/4$	$1/6$

Déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $\text{cov}(X, Y)$. Conclusion ?

Exercice 120

L'étude du mode de paiement des clients d'un magasin en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0,4 \quad ; \quad P[S = 0 \cap U = 1] = 0,3$$

$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0,2 \quad ; \quad P[S = 1 \cap U = 1] = 0,1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de S et U .
2. Calculer la covariance du couple (S, U) . Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

Exercice 121

Un opérateur téléphonique propose trois forfaits :
le forfait n°1 coûte 10 € par mois,
le forfait n°2 coûte 20 € par mois,
le forfait n°3 coûte 30 € par mois.

Un groupe de n clients se rend dans une boutique de cet opérateur et chacun achète un de ces trois forfaits au hasard, avec équiprobabilité et sans être influencé par les choix des autres clients.

On note les variables aléatoires :

X_1 , égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°1

X_2 , égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°2

X_3 , égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°3

H , somme globale mensuelle en euros versée par ces n clients à l'opérateur.

1. a) Justifier que X_1 suit une loi usuelle que l'on détaillera, en précisant $X_1(\Omega)$ et l'expression de $P(X_1 = k)$ pour tout entier $k \in X_1(\Omega)$.
b) Donner les valeurs de l'espérance $E(X_1)$ et de la variance $V(X_1)$.

- c) Justifier que les variables X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1 .
2. a) Justifier que $X_1 + X_2 = n - X_3$. En déduire la variance de $X_1 + X_2$.
- b) En déduire $\text{cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Exprimer H en fonction des variables X_1 , X_2 et X_3 puis montrer que $E(H) = 20n$.

★ Tirages successifs

Exercice 122

Une urne contient 2 boules rouges et une boule verte indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne trois tirages successifs, avec remise de la boule tirée après chacun des tirages.

On note pour $i = 1, 2$ ou 3 : R_i : « La i -ème boule tirée est rouge »

et V_i : « La i -ème boule tirée est verte » (donc $V_i = \overline{R_i}$)

On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le tirage a donné une boule rouge.

1. a) Reconnaître la loi de X en justifiant votre réponse.
Préciser les valeurs prises par X et les probabilités correspondantes.
- b) Donner l'espérance et la variance de X .
- 2) On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge (dans le cas où au moins une boule rouge est tirée sur les trois).
On donne à Y la valeur 0 si les tirages ont donné 3 boules vertes.
- a) Décrire en fonction des événements R_i , et V_i les événements suivants :
 $[(X = 2) \cap (Y = 1)]$, $[(X = 1) \cap (Y = 3)]$ et $[(X = 3) \cap (Y = 2)]$ et déterminer leur probabilité.
- b) Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi du couple (X, Y) .
(On justifiera pour l'exemple deux valeurs non traitées dans la question précédente)
- c) Expliquer comment retrouver la loi de X à partir du tableau.
- d) Donner la loi marginale de Y et calculer l'espérance $E(Y)$ de Y .
- e) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de X et de Y .

Exercice 123

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose d'une urne opaque qui contient $(n-1)$ boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

1. On effectue des tirages **avec remise** jusqu'à obtention de la boule noire.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.

- a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.

- b) Quel est le nombre moyen de tirages nécessaire à l'obtention de la boule noire ?

2. On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne, jusqu'à l'obtention de la boule noire.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.

On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i -ième tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i -ième tirage ».

- a) En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.

- b) Démontrer que, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $P(Y = k) = \frac{1}{n}$.

Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

- c) Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

VII. Lois à densité**Exercice 124**

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; +\infty [$ par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f .

Déterminer la fonction de répartition F de X .

3. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 125

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f .
Déterminer la fonction de répartition F de X .
3. Calculer l'espérance et la variance de X .
4. Calculer $P(-2 \leq X \leq 1/4)$.

Exercice 126

On considère les fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1+e^x}, \quad g(x) = -2\ln(1+e^{-x}), \quad h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Soit $x \geq 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que :

$$h(x) = -f'(x) \quad \text{et} \quad f(x) = g'(x).$$

2. Soit $A \geq 0$. Justifier que : $\int_0^A h(x) dx = 1 - f(A)$. Que vaut $\int_0^A f(x) dx$?
3. Soit $A \geq 0$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^A x \cdot h(x) dx = -A f(A) + g(A) - g(0).$$

4. La fonction h est-elle continue en 0 ? Une réponse argumentée est attendue.
5. Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

6. Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0, & H(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ \text{si } x < 0, & H(x) = 0. \end{cases}$$

7. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Z \geq \ln(2)), \quad P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8)) \quad \text{et} \quad P_{(Z \geq \ln(2))}(Z \leq \ln(8)).$$

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

8. Déterminer la médiane de Z , c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $H(x) = \frac{1}{2}$.
9. Établir que Z possède une espérance et donner la valeur de $E(Z)$.

VIII. Lois à densité usuelles

Exercice 127

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité.
Reconnaître la loi de X . Donner la fonction de répartition F de X .
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Calculer $P(0,4 \leq X \leq 1)$.

Exercice 128

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda > 0$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité.
Donner la fonction de répartition F de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 129

Soit $X \sim \mathcal{N}(20, 5)$. Calculer $P(X \leq 28)$, $P(X \geq 12)$, $P(12 \leq X \leq 28)$.
(Se servir de la table du cours).

Exercice 130

U désigne une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. a) Donner une densité de U .
b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire U .
c) Exprimer, en fonction du réel x , la probabilité : $P(U > x)$.
2. La compagnie des remontées mécaniques a installé deux guichets au bas des pistes. On estime que le temps de passage d'un skieur à l'un des guichets suit la même loi que la variable aléatoire U .
Trois skieurs A , B et C se présentent en même temps aux guichets. A et B s'adressent simultanément aux deux guichets, C attend que A ou B libère un guichet.
On désigne par :
 - U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux skieurs A et B ,
 - V le temps d'attente du skieur C .

On supposera que les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes.

- a) Justifier que : pour tout x réel, $(V > x) = (U_1 > x) \cap (U_2 > x)$.
- b) En déduire, pour tout x réel, $P(V > x)$ en fonction de $P(U > x)$.
- c) Établir que la variable V admet pour fonction de répartition la fonction G définie par :

$$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{si } x < 0, \\ G(x) = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ G(x) = 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- d) En déduire une densité de probabilité g de la variable V .
- e) Montrer que V admet une espérance et une variance que l'on calculera.

IX. Convergences et approximations

Exercice 131

Citer l'inégalité de Markov

Exercice 132

Citer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

X. Estimation

Exercice 133

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$ de paramètre inconnu p . On considère les

trois estimateurs de p suivants : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $T_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iX_i$ et $U_n = 0$.

1. Montrer que S_n et T_n sont des estimateurs sans biais alors que U_n est biaisé.
2. Une suite de 20 lancers donne (4; 6; 3; 1; 6; 5; 3; 2; 4; 6; 1; 4; 4; 5; 1; 3; 2; 6; 5; 5). X_i est la variable aléatoire réelle de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ (p paramètre à estimer) indiquant l'obtention (ou non) d'un as au i -ième lancer.
Donner une estimation de p avec l'estimateur S_n puis avec l'estimateur T_n .

Exercice 134

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

1. Déterminer, en fonction de $\overline{X}_n$, un estimateur sans biais T_n de θ .
2. a) Justifier que M_n est une variable à densité et en donner une densité.
b) Déterminer, en fonction de M_n , un estimateur sans biais U_n de θ .

Exercice 135

On lance une pièce et on note $X = 1$ si on obtient pile et $X = 0$ sinon. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(\text{pile})$. On se donne un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la variable X et on considère les estimateurs $T_n = X_1$ et la moyenne empirique $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer les risques quadratiques pour chacun des deux estimateurs du paramètre p .
2. Quel est le meilleur estimateur ?

Exercice 136

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi uniforme sur $[0, a]$. On cherche à estimer a .

1. On note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de X . On rappelle que $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Soit $T_n = 2\overline{X}_n$.

Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a et calculer son risque quadratique.

2. Soit $T'_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Donner la fonction de répartition de X , puis déterminer celle de T'_n .

En déduire une densité de T'_n puis son biais et son risque quadratique.

3. Soit $T''_n = \frac{n+1}{n} T'_n$. Déterminer son biais et son risque quadratique.
4. Pour de grandes valeurs de n , quelle est le meilleur estimateur de a ?

Exercice 137

Lors d'un sondage pré-électoral, 1000 électeurs choisis au hasard ont été interrogés. 520 d'entre-eux se sont déclarés favorables à Mme Durand. Soit p la proportion inconnue d'électeurs favorables à Mme Durand dans la population et soit X_i la variable aléatoire qui, pour tout i compris entre 1 et 1000, vaut 1 si le i -ième électeur compte voter pour Mme Durand et 0 sinon. $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon où les X_i sont indépendantes et où chaque

X_i suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p . On note $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

1. Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion p d'électeurs favorables à Mme Durand dans la population. On donne $\frac{1}{\sqrt{200}} \approx 0,07$.
2. Quel doit être le nombre minimal d'électeurs interrogés pour que l'intervalle de confiance que l'on puisse en déduire soit de longueur inférieure ou égale à 0,04 ?

XI. Statistiques**Exercice 138**

Déterminer la médiane et l'écart interquartile des deux séries suivantes :

Série A : 10 – 14 – 8 – 14 – 15 – 8 – 18 – 14 – 11 ;

Série B : 13 – 15 – 10 – 7 – 11 – 11 – 18 – 6 – 11 – 15 ;

Exercice 139

➤ On considère la série statistique :

Valeur	103	104	105	106	107
Effectif	14	17	9	19	5

1. Sa moyenne est égale à :
 A. 106 B. 104,75 C. 105
2. La médiane de la série ci-dessus est égale à :
 A. 105 B. 104,5 C. 105,5
3. L'étendue de la série ci-dessus est égale à :
 A. 14 B. 4 C. 107

➤ On considère la série statistique :

Classe	$[0 ; 5[$	$[5 ; 10[$	$[10 ; 15[$	$[15 ; 20[$	$[20 ; 25[$
Effectif	2	5	12	7	4

4. Sa classe modale est :

A. $[20 ; 25[$

B. 12

C. $[10 ; 15[$

5. Une classe comporte 25 élèves. La taille moyenne des 15 filles est 1,65 m et celle des garçons est 1,75 m. La taille moyenne des élèves de la classe est :

A. 1,70 m

B. 1,71 m

C. 1,69

➤ On considère la série statistique :

Valeur	10	12	15	20	25
Fréquence	0,17	0,28	0,32	0,15	0,08

6. Sa moyenne est égale à :

A. 15

B. 14,86

C. 16,4

Exercice 140

On considère la série double ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,8	7,1	10,3	12,9	16,2

1. Déterminer une équation de la droite passant par les premier et dernier points.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen.

Exercice 141

On considère la série double ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	0	2	3	4

Calculer, à la main, le coefficient de corrélation linéaire puis les équations des droites de régression. Vérifier avec Scilab.