

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les exercices Incontournables Correction

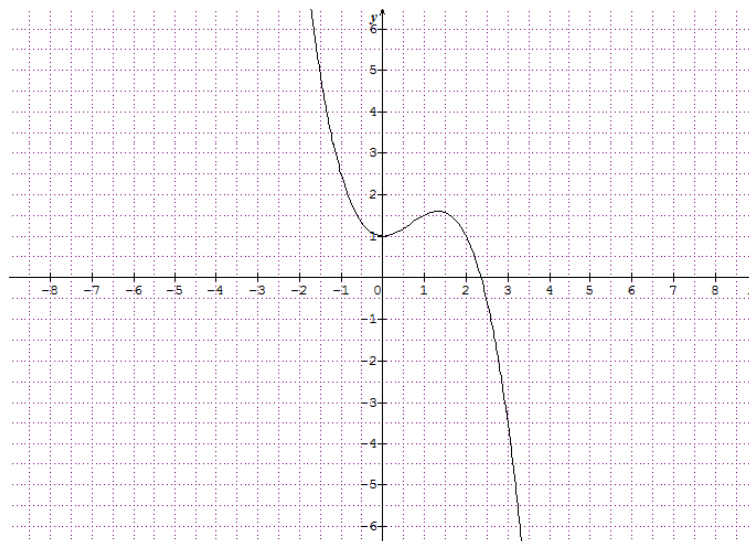
Julien Fernandez

Exercice 1

1.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	9	2,5	1	1,5	3	-3,5

2.

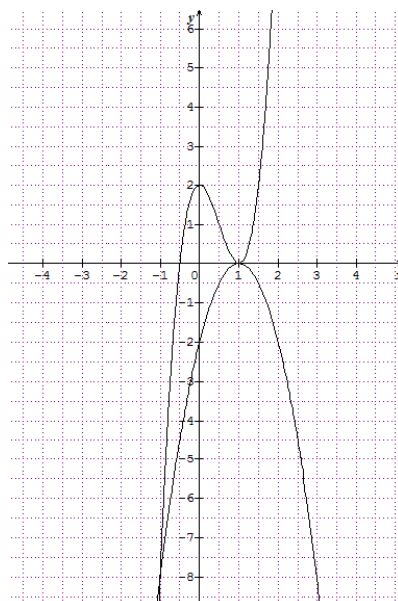
**Exercice 2**

1.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-8	-4,5	-2	-0,5	0	-0,5	-2
$g(x)$	-8	0	2	1	0	2	10

2. D'après le tableau, $(-1, -8)$ et $(1, 0)$ sont deux points d'intersections de C et C' .

3.



Exercice 3

1. $x=12$ 2. $x=3$ 3. $x=20$ 4. $x=-3$ 5. $x=72$ 6. $x=\frac{8}{3}$ 7. $x=\frac{13}{2}$ 8. $x=\frac{4}{3}$
 9. $x=-26$ 10. $x=-1$ ou $x=-2$ 11. $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{3}{4}$ 12. $x=-4$ 13. $x=\frac{19}{3}$

Exercice 4

1. $3x-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

On en déduit : le signe de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
$3x-1$	-	0	+

2. $2x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

On en déduit : le signe de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+

3. On en déduit le signe du produit $(3x-1)(2x+1)$:

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/3$	$+\infty$
$3x-1$	-	0	+	+
$2x+1$	-	0	+	+
$(3x-1)(2x+1)$	+	0	-	+

Exercice 5

1. $2x+3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq -3$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

$2-3x \geq 0$

$\Leftrightarrow -3x \geq -2$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-3/2$	$2/3$	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$2-3x$	+	+	0	-
$(2x+3)(2-3x)$	-	0	+	-

2. On en déduit que les solutions de l'inéquation $(2x+3)(2-3x) > 0$ sont $\left] -\frac{3}{2} ; \frac{2}{3} \right[$.

Exercice 6

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 2x+3 \geq 0 & 2-x \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow 2x \geq -3 & \Leftrightarrow -x \geq -2 \\
 & \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} & \Leftrightarrow x \leq 2
 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-3/2$	2	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{2x+3}{2-x}$	$+$	0	$-$	$+$

2. On en déduit que les solutions de l'inéquation $\frac{2x+3}{2-x} \leq 0$ sont $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$.

Exercice 7

1. Résolution de $x^2 - 3x + 2 = 0$:

On pose $a=1$, $b=-3$ et $c=2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = 1^2 > 0.$$

Il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

2. Résolution de $2x^2 + x + 2 = 0$:

On pose $a=2$, $b=1$ et $c=2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 2 = 1 - 16 = -15 < 0.$$

L'équation n'a pas de solution.

3. Résolution de $3x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = 0$:

On pose $a=3$, $b=\frac{1}{4}$ et $c=-\frac{1}{4}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 > 0.$$

Il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1/4 - 7/4}{2 \times 3} = \frac{-8/4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1/4 + 7/4}{2 \times 3} = \frac{6/4}{6} = \frac{6}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

4. Résolution de $x^2 + 8x + 15 = 0$:

On pose $a=1$, $b=8$ et $c=15$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 1 \times 15 = 64 - 60 = 4 = 2^2 > 0.$$

Il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 2}{2 \times 1} = -\frac{10}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 2}{2 \times 1} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Exercice 8

Factoriser, si possible, les fonctions suivantes :

1. Factorisation de $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

D'après l'exercice précédent, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, donc $f(x) = (x-1)(x-2)$.

2. Factorisation de $f(x) = 2x^2 + x + 2$:

D'après l'exercice précédent, $\Delta = -17 < 0$, donc $f(x)$ n'est pas factorisable sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

3. Factorisation de $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$.

D'après l'exercice précédent, $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$, donc $f(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

Exercice 91. Signe de $f(x) = 75x^2 - 60x + 12$. On a : $\Delta = 0$ et $x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{-60}{75} = \frac{4}{5}$.

$f(x)$ est du signe de a .

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$75x^2 - 60x + 12$	+	0	+

2. Signe de $f(x) = -2x^2 + x - 1$. On a : $\Delta = -7$ donc $f(x)$ est du signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + x - 1$	+	+

3. Signe de $f(x) = -x^2 + 8x - 15$. On a : $\Delta = 4$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$.

$f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$	
$-x^2+8x-15$	-	0	+	0	-

Exercice 10

1. $f'(x) = 4x - 1$

2. $f'(x) = 2x - 4$

3. $f'(x) = -4x + 4$

4. $f'(x) = -4x + 4$

5. $f'(x) = 12x^2 - 12x$

6. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

7. $\left(\frac{k}{u}\right)' = -\frac{ku'}{u^2}$, donc $f'(x) = -\frac{3 \times (x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2}$.

8. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc : $f'(x) = \frac{(x-1)'(x+1) - (x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}$,

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

9. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc : $f'(x) = \frac{(x-3)'(2x+4) - (2x+4)'(x-3)}{(2x+4)^2}$,

$$f'(x) = \frac{1(2x+4) - 2(x-3)}{(2x+4)^2} = \frac{2x+4 - 2x+6}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}.$$

Exercice 11

Principe : on détermine d'abord le signe de $f'(x)$ puis on en déduit les variations de f .

1. • $f'(x) = 4x - 1$

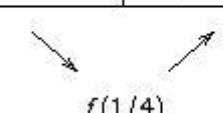
• $f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

- On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

x	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

2. • $f'(x) = 2x - 4$

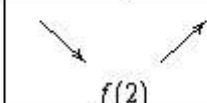
• $f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq 4$

$\Leftrightarrow x \geq 2$

- On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

3 et 4. • $f'(x) = -4x + 4$

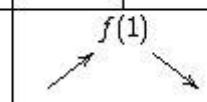
- $f'(x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4x \geq -4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

- On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

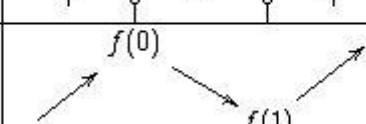
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

5. • $f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

- 0 et 1 sont racines évidentes.

$f'(x)$ est du signe de 12 à l'extérieur des racines.

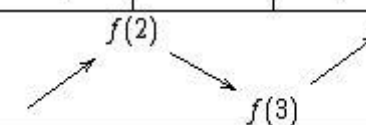
- On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

x	$-\infty$	0		1	$-\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

5. • $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$.

- On a : $\Delta = 36$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. $f'(x)$ est du signe de 6 à l'extérieur des racines.

- On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

x	$-\infty$	2		3	$-\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

Exercice 12

1.
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} &= 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 &= +\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$
2.
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} &= 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 &= -\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array} \quad (\text{on a utilisé : } f(x) = \frac{4}{x} + (-2x^2))$$
3.
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{2}{x} &= 4 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$
4.
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} &= 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2} x^3 &= 8 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8 \end{array}$$

Exercice 13

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- 3 et 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$

Exercice 14

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$

Exercice 15

On détermine d'abord le signe du dénominateur :

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1, \text{ d'où}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

Exercice 16

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

Pour déterminer une limite en une valeur interdite, on détermine d'abord le signe du dénominateur :

$$x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4, \text{ d'où}$$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x+1}{x+4} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x+1}{x+4} = \frac{-7}{0^+} = -\infty.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{-x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2.$$

Pour déterminer une limite en une valeur interdite, on détermine d'abord le signe du dénominateur :

$$-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2, \text{ d'où}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$+$	0	$-$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-5}{-x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-5}{-x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Pour déterminer une limite en une valeur interdite, on détermine d'abord le signe du dénominateur. On a : $\Delta = 1$, $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$. x^2+3x+2 est du signe de 1 à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	$+$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \frac{5}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \frac{5}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Pour déterminer une limite en une valeur interdite, on détermine d'abord le signe du dénominateur. -1 et 1 sont racines évidentes. $x^2 - 1$ est du signe de 1 à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$+$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = \frac{6}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = \frac{6}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Exercice 17

D'après l'exercice précédent :

- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .
La droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .
- La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .
Les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales à la courbe représentative de f .
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .
Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à la courbe représentative de f .

Exercice 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2. \text{ D'après le théorème des gendarmes, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Exercice 19

$$1. f(x) = x^4, \text{ donc } f'(x) = 4x^3.$$

- $f(0) = 0^4 = 0.$
- $f'(0) = 4 \times 0^3 = 0.$
- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = 0(x - 0) + 0$, ou encore : $y = 0.$

2. $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, donc $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 = 2x^2$.

- $f(1) = \frac{2}{3} \times 1^3 = \frac{2}{3}$.

- $f'(1) = 2 \times 1^2 = 2$.

- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1), \text{ c'est-à-dire } y = 2(x-1) + \frac{2}{3} = 2x - 2 + \frac{2}{3} = 2x - \frac{6}{3} + \frac{2}{3}, \text{ ou}$$

$$\text{encore : } y = 2x - \frac{4}{3}.$$

3. $f(x) = x^2 + 1$, donc $f'(x) = 2x$.

- $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

- $f'(2) = 2 \times 2 = 4$.

- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2), \text{ c'est-à-dire } y = 4(x-2) + 5 = 4x - 8 + 5, \text{ ou encore :}$$

$$y = 4x - 3.$$

4. $f(x) = x^5 - x^3$, donc $f'(x) = 5x^4 - 3x^2$.

- $f(-1) = (-1)^5 - (-1)^3 = -1 + 1 = 0$.

- $f'(-1) = 5 \times (-1)^4 - 3 \times (-1)^2 = 5 \times 1 - 3 \times 1 = 2$.

- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 est :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1), \text{ c'est-à-dire } y = 2(x+1) + 0, \text{ ou encore : } y = 2x + 2.$$

5. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, donc $f'(x) = 2x - 2$.

- $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{4} - 3 + 3 = \frac{9}{4}$.

- $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} - 2 = 3 - 2 = 1$.

- Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est :

$$y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right), \text{ c'est-à-dire } y = 1\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = x - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = x - \frac{6}{4} + \frac{9}{4}, \text{ ou}$$

$$\text{encore : } y = x + \frac{3}{4}.$$

Exercice 20

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty.$$

$$2. g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1, \text{ donc } g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

0 et 1 sont racines évidentes. $g'(x)$ est du signe de 6 à l'extérieur des racines.

On en déduit :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

avec : $g(0) = 2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 - 1 = -1$ et $g(1) = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$.

3. Sur $]-\infty ; 1]$, le maximum de g est -1 , donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Sur $]1 ; +\infty[$:

- g est continue sur $]1 ; +\infty[$,
- g est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$,
- $0 \in g([1 ; +\infty[) =]-2 ; +\infty[$.

L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1 ; +\infty[$.

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

De plus, $g(1) = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 = -2 < 0$ et $g(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 1 = 3 > 0$. Donc $\alpha \in [1; 2]$

4. On en déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Exercice 21

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

$$2. g(x) = x^3 - 3x^2 - 4, \text{ donc } g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

0 et 2 sont racines évidentes. $g'(x)$ est du signe de 3 à l'extérieur des racines.

On en déduit :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	$-\infty$	-4	-8	$+\infty$	

avec : $g(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 - 4 = -4$ et $g(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - 4 = 8 - 3 \times 4 - 4 = -8$.

3. Sur $]-\infty ; 2]$, le maximum de g est -4 , donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Sur $]2 ; +\infty[$:

- g est continue sur $]2; +\infty[$,
- g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$,
- $0 \in g(]2; +\infty[) =]-8; +\infty[$.

L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2; +\infty[$.

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

4. On en déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Exercice 22

1. $A = \ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$
2. $B = \ln(2e^3) = \ln(2) + \ln(e^3) = \ln(2) + 3$
3. $C = 2\ln(4) - \ln(4e^2) = 2\ln(2^2) - [\ln(4) + \ln(e^2)] = 4\ln(2) - 2\ln(2) - 2 = 2\ln(2) - 2$

Exercice 23

1. $\ln(x+3) > \ln 5$
 $\Leftrightarrow x+3 > 5$
 $\Leftrightarrow x > 5-3$
 $\Leftrightarrow x > 2$
2. $\ln(x) > 1$
 $\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(e)$
 $\Leftrightarrow x > e$
3. $\ln(x) \leq 2$
 $\Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(e^2)$
 $\Leftrightarrow x \leq e^2$

Exercice 24

1.

- a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty \end{array}$
 - b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty \end{array}$
 - c) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x) = +\infty \end{array} \quad (\text{on a utilisé : } x^2 - \ln x = x^2 + (-\ln x))$
 - d) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array} \quad (\text{on a utilisé : } \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x)$
2. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \end{array}$

3.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty \end{array} \quad (\text{on a utilisé : } x - \ln x = x + (-\ln x))$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées (limite du cours).}$$

Exercice 25

$$1. f(x) = \ln(x) + x$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) + x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + x) = +\infty \end{array}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

$$\text{c) } \frac{1}{x} > 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[. \text{ Donc } f'(x) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

$$2. f(x) = \ln(x) - x$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) - x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x) = -\infty \end{array}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

$$\text{c) } \bullet \quad x > 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[. \text{ Donc } f'(x) \text{ est du signe de } 1-x.$$

$$\bullet \quad 1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1.$$

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	-1	$-\infty$

$$f(1) = \ln(1) - 1 = -1.$$

$$3. f(x) = \ln(x) - 2x$$

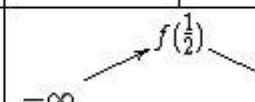
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) - 2x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - 2x) = -\infty \end{array}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}.$$

c) • $x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.

• $1-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2} = -\ln(2) - 1.$$

4. $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2$

a) $\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^2 = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty \end{array}$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x}$.

c) • $x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.

• $1+x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.

• $1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$.

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

$$f(1) = \ln(1) - \frac{1}{2} \times 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

5. $f(x) = \ln(3x)$

a) $\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(3x) = -\infty \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \\ \bullet \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x) = +\infty \end{array}$

b) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, donc $f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$.

c) $\frac{1}{x} > 0$ car $x \in]0; +\infty[$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

6. $f(x) = \ln(-x)$

a) $\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(-x) = -\infty \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \bullet \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty \end{array}$

b) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, donc $f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

c) $\frac{1}{x} < 0$ car $x \in]-\infty; 0[$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$.

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	$-\infty$

7. $f(x) = \ln(x-2)$

a) $\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0 \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = -\infty \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x-2 = +\infty \\ \bullet \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty \end{array}$

b) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, donc $f'(x) = \frac{1}{x-2}$.

c) $\frac{1}{x-2} > 0$ car $x \in]2; +\infty[$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$.

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

8. $f(x) = x \ln(x)$

a) $\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \end{array}$

b) $(u \times v)' = u'v + v'u$, donc $f'(x) = (x)' \times (\ln x) + (\ln x)' \times (x) = 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x = \ln x + 1$.

c) • $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$.

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$	
f	0	$\searrow \quad \nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées (limite du cours).

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ } par produit de limites,
 • $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ } $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ (on a utilisé : $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$)

b) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc $f'(x) = \frac{(\ln x)' \times (x) - (x)' \times (\ln x)}{(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

c) • $x^2 > 0$ car $x \neq 0$.

• $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow -\ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$	
f	$-\infty$	$\nearrow \quad \searrow$	0

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

10. $f(x) = x^2 + 1 - 2 \ln(x)$

a) • $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$ } par somme de limites,
 • $\lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln(x) = +\infty$ } $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1 - 2 \ln(x)) = +\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1 - 2 \ln(x)) = +\infty \end{array}$$

$$\text{b) } f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

$$\text{c) } \bullet \quad 2 > 0.$$

$$\bullet \quad x > 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[.$$

$$\bullet \quad x+1 > 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[.$$

$$\bullet \quad x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 2 \ln(1) = 2.$$

Exercice 26

$$1. \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2} + 3 = -\ln(2) - 1 + 3 = 2 - \ln(2) \approx 1,3.$$

$$2. \text{ a) } \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -2x + 3 = 3 \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 3 = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$3. \text{ a) } f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}.$$

$$\text{b) } \bullet \quad x > 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[. \text{ Donc } f'(x) \text{ est du signe de } 1-2x.$$

$$\bullet \quad 1-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

• On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 2 - \ln(2) \approx 1,3.$$

4. • $f(1) = \ln(1) - 2 + 3 = 1.$
- $f'(1) = \frac{1-2}{1} = -1.$
- Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est :
 $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire $y = -(x-1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2.$

5. a) Sur $]0 ; 0,5[$:

- f est continue sur $]0 ; 0,5[$,
- f est strictement croissante sur $]0 ; 0,5[$,
- $0 \in f(]0 ; 0,5[) =]-\infty ; f(0,5)[$,

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0 ; 0,5[$.

Sur $]0,5 ; +\infty[$:

- f est continue sur $]0,5 ; +\infty[$,
- f est strictement décroissante sur $]0,5 ; +\infty[$,
- $0 \in f(]0,5 ; +\infty[) =]-\infty ; f(0,5)[$,

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]0,5 ; +\infty[$.

b) De plus, $f(1) = \ln(1) - 2 \times 1 + 3 = 1 > 0$ et $f(2) = \ln(2) - 2 \times 2 + 3 \approx -0,7 < 0.$

Donc $\beta \in]1, 2[$

Exercice 27

1. a) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

b) $g'(x) > 0$ car $x \in]0, +\infty[$. Donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

c) $g(1) = 1^2 - 1 + \ln(1) = 0.$

On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $g(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad (\text{on a utilisé : } \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

c) $\left(w - \frac{u}{v}\right)' = w' - \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{(\ln(x))'(x) - (x)'(\ln(x))}{x^2}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{(1/x) \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \text{ pour tout } x > 0.$$

d) On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(1) = 1 + 1 - \frac{\ln(1)}{1} = 2.$$

e) • $f(x) - (x+1) = -\frac{\ln(x)}{x}.$

• Étudions le signe de $-\frac{\ln(x)}{x}$:

$x > 0$ car $x \in]0, +\infty[$ et le signe de $\ln$ est connu. Il résulte :

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (x+1)$	+	0	-

On en déduit :

sur $]0; 1]$, C est au-dessus de D , sur $[1; +\infty[$, C est au-dessous de D .

Exercice 28

1. $\frac{e^7}{e^2} = e^{7-2} = e^5$

2. $\frac{(e^{-1})^4}{e} = e^{-4-1} = e^{-5}$

Exercice 29

1. $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ 2. $e^{-x} > 2 \Leftrightarrow -x > \ln 2 \Leftrightarrow x < -\ln 2$ 3. $e^{2x} \leq 2 \Leftrightarrow 2x \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 2}{2}$

Exercice 30

- a) $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\}$ par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2) = +\infty$.
- b) $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\}$ par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^2) = +\infty$.
- c) $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \end{array} \right\}$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = +\infty$.
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées (limite de cours).
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ par croissances comparées (limite de cours).
- f) $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 2} e^x = e^2 \end{array} \right\}$ par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2 + \frac{1}{x}} = e^2$.
- g) $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\}$ par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$.
- h) $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\}$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} = 0$.

Exercice 31

- $(e^{ax})' = a \times e^{ax}$, donc $f'(x) = 2e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$.
- $(e^u - v)' = u'e^u - v'$, donc $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$.
 - $2e^x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $(e^x - 1)$.
 - $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. On en déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

- $(u^2)' = 2u'u$, donc $f'(x) = 2(e^x - 1)'(e^x - 1) = 2e^x(e^x - 1) \dots$ (voir 2.)
- $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$, donc :

$$f'(x) = (x+3)'(e^{-x}) + (e^{-x})'(x+3) = 1 \times e^{-x} - e^{-x}(x+3),$$

$$f'(x) = e^{-x}[1 - (x+3)] = (-x-2)e^{-x}.$$

- $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $(-x-2)$.
- $-x-2 > 0 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2$. On en déduit :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

5. $(e^{-x})' = -e^{-x}$, donc $f'(x) = 1 - 4e^{-x}$.

$$1 - 4e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -4e^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -x < \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x > -\ln\left(\frac{1}{4}\right). \text{ On en déduit :}$$

x	$-\infty$	$-\ln\left(\frac{1}{4}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 2) - (e^x + 2)'(e^x - 1)}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x)(e^x + 2) - (e^x)(e^x - 1)}{(e^x + 2)^2},$$

$$f'(x) = \frac{e^x[(e^x + 2) - (e^x - 1)]}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(e^x + 2 - e^x + 1)}{(e^x + 2)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 2)^2}.$$

- $3e^x > 0$ et $(e^x + 2)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

7. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(2e^x - 3)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'(2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{(2e^x)(e^x - 1) - (e^x)(2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2},$$

$$f'(x) = \frac{e^x[2(e^x - 1) - (2e^x - 3)]}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(2e^x - 2 - 2e^x + 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

- $e^x > 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$. On a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$

Exercice 32

1. $f'(x) = 2e^{2x}$.
2. • $f(0) = e^{2 \times 0} = 1$.
 • $f'(0) = 2e^{2 \times 0} = 2$.
 • Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :
 $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = 2x + 1$.

Exercice 33

1. $f(x) = e^x + (-x - 4)$
 $\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 4 = +\infty \end{array} \right\}$ par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Non demandé :

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} -x - 4 = -\infty \end{array} \right\} \text{ par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$.
 b) et c) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. On en déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	-3	$+\infty$

$$f(0) = e^0 - 0 - 4 = -3.$$

Exercice 34

1. $\frac{3}{1+2e^{-x}} = \frac{3}{1+2e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{3e^x}{2+e^x} = f(x)$.
2. En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2e^{-x}) = 1$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+2e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.
 En $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+2e^{-x}) = +\infty$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1+2e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
3. $\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k v'}{v^2}$, donc $f'(x) = -\frac{3(1+2e^{-x})'}{(1+2e^{-x})^2} = -\frac{3 \times (-2e^{-x})}{(1+2e^{-x})^2} = \frac{6e^{-x}}{(1+2e^{-x})^2}$.
 $6e^{-x} > 0$ et $(1+2e^{-x})^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

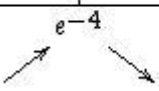
Exercice 35

1. $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$, donc :

$$g'(x) = (x-3)'(e^{-x}) + (e^{-x})'(x-3) = 1 \times e^{-x} - e^{-x}(x-3),$$

$$g'(x) = e^{-x}[1 - (x-3)] = (-x+4)e^{-x}.$$

- $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $(-x+4)$.
- $-x+4 > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$. On en déduit :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g			

$$g(4) = (4-3)e^{-4} = e^{-4}$$

2. $e^{-4} < 1$ donc, d'après le tableau des variations de g , $g(x) < 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36

1. $g'(x) = e^x + 1 > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. • g est continue sur $[-2; -1]$,

• g est strictement croissante sur $[-2; -1]$,

• $g(-2) = e^{-2} - 2 + 1 = e^{-2} - 1 < 0$ et $g(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = e^{-1} > 0$, donc $0 \in g([-2; -1])$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2; -1]$.

3. On en déduit :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Exercice 37

1. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

2. $F(x) = \frac{4}{5}x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x$

3. $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + 2\sqrt{x}$

4. $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{15x^3} - 5\sqrt{x}$

Exercice 38

1. $F(x) = \ln(x) + e^x$ 2. $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}$ 3. $f(x) = \ln(x+1) + e^{x+3}$

Exercice 39

$$I_1 = \int_1^3 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4.$$

$$I_2 = \int_1^2 (x^2 - 2x) \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 \right) = \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3} - 3 = \frac{7}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$I_3 = \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1.$$

$$I_4 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_{e^2}^{e^5} = \ln(e^5) - \ln(e^2) = 5 - 2 = 3.$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{1}{x+2} \, dx = [\ln(x+2)]_1^2 = \ln(4) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

$$I_6 = \int_0^1 (x^3 + x^2 + x + 1) \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3+4+6+12}{12} = \frac{25}{12}.$$

$$I_7 = \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx = [2\sqrt{x}]_4^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

$$I_8 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \, dx = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln(x) \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln(2) \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \ln(1) \right),$$

$$I_8 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln(2) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{-1-4+4+8}{8} + \ln(2) = \frac{7}{8} + \ln(2).$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \text{ (on a utilisé la formule } \int u' u = \frac{u^2}{2} \text{)}.$$

Exercice 40

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^6 f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx + \int_2^3 f(x) \, dx + \int_3^6 f(x) \, dx,$$

$$\int_0^6 f(x) \, dx = \int_0^1 0 \, dx + \int_1^2 x \, dx + \int_2^3 -x \, dx + \int_3^6 0 \, dx,$$

$$\int_0^6 f(x) \, dx = 0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[-\frac{x^2}{2} \right]_2^3 + 0,$$

$$\int_0^6 f(x) \, dx = \left(\frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \right) + \left(-\frac{3^2}{2} \right) - \left(-\frac{2^2}{2} \right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Exercice 41

1. $(uv - w)' = u'v + v'u - w'$, donc $F'(x) = (x)'(\ln(2x)) + (\ln(2x))'(x) - (x)'$,

$$F'(x) = 1 \times \ln(2x) + \frac{2}{2x} \times x - 1 = \ln(2x) + 1 - 1 = \ln(2x).$$

2. $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x) dx = \left[x \ln(2x) - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = (\ln(2) - 1) - \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \right) = \ln(2) - 1 + \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}.$

Exercice 42

1. $(uv)' = u'v + v'u$ et $(w^2)' = 2w'w$, donc $g'(x) = (x)'((\ln x)^2) + ((\ln x)^2)'(x)$,

$$g'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x = (\ln x)^2 + 2 \ln x.$$

2. $I = \int_e^{e^2} f(x) dx = \int_e^{e^2} (g'(x) - 2) dx = [g(x) - 2x]_e^{e^2} = (e^2 (\ln e^2)^2 - 2e^2) - (e (\ln e)^2 - 2e),$

$$I = (e^2 (\ln e^2)^2 - 2e^2) - (e (\ln e)^2 - 2e) = 4e^2 - 2e^2 - e + 2e = 2e^2 + e.$$

Exercice 43

C.

Exercice 44

• $I_1 = \int_1^e \ln x dx :$

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 1$ sont continues et dérivables sur $[1, e]$.

On pose : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$. On a :

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [uv] - \int u' v$$

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - e + 1 = 1$$

• $I_2 = \int_0^1 x e^x dx :$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et dérivables sur $[0, 1]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = e^x.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [uv] - \int u' v$$

$$I_2 = \int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

$$\bullet \quad I_3 = \int_0^1 x e^{-x} dx :$$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues et dérivables sur $[0, 1]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I_3 = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

$$\bullet \quad I_4 = \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-2x}$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I_4 = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[e^{-2x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} e^{-2}.$$

Exercice 45

1. $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$, donc $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \int_1^x \ln t dt$, donc $f'(x) = \ln x$. On en déduit :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = \int_1^1 \ln t dt = 0.$$

Exercice 46

$$I_0 = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \text{ et } I_n = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n} e^{-n}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 47

$$1. \quad I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{-x} dx = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx.$$

- $e^{-x} > 0$,
- $x^n > 0$ car $x \in [0; 1]$,
- $x-1 < 0$ car $x \in [0; 1]$.

On en déduit que $I_{n+1} - I_n < 0$ pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante sur $\mathbf{N}^*$.

$$2. \quad \text{De plus, } x^n e^{-x} \geq 0 \text{ car } x \in [0; 1], \text{ donc } I_n \geq 0.$$

$(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par 0. $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc convergente.

$$3. \quad e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0 \text{ car } x \in [0; 1], \text{ donc } e^{-1} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$e^{-1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \text{ ou encore } \frac{e^{-1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 48

$$1. \quad \bullet \quad I_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$\bullet \quad I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx :$$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues et dérivables sur $[0, 1]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I_1 = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx = [-x e^{-x}]_0^1 - [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

$$\bullet \quad I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx :$$

Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues et dérivables sur $[0, 1]$.

On pose : $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a :

$$u'(x) = (n+1)x^n \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -e^{-1} + (n+1) I_n = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n.$$

2. D'après la relation de récurrence précédente :

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_2 &= -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2 \times \left(1 - \frac{2}{e} \right) = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}. \\ \bullet \quad I_3 &= -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + 3 \times \left(2 - \frac{5}{e} \right) = -\frac{1}{e} + 6 - \frac{15}{e} = 6 - \frac{16}{e}. \end{aligned}$$

On en déduit l'intégrale :

$$K = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} dx = -\int_0^1 x^3 e^{-x} dx + 2 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \int_0^1 x e^{-x} dx = -I_3 + 2I_2 - I_1,$$

$$K = -\left(6 - \frac{16}{e} \right) + 2 \left(2 - \frac{5}{e} \right) - \left(1 - \frac{2}{e} \right) = -6 + \frac{16}{e} + 4 - \frac{10}{e} - 1 + \frac{2}{e} = \frac{8}{e} - 3.$$

Exercice 49

1. • $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ car $f(x) = 0$ sur $] -\infty ; 0[$,

• $f(0) = 3 \times 0^2 = 0.$

f est donc continue en 0.

• $f(1) = 3 \times 1^2 = 3,$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ car $f(x) = 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

f n'est donc pas continue en 1.

2. D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^{+\infty} 0 dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \left[x^3 \right]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1.$$

Exercice 50

• Sous réserve de convergence, $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx.$

• $\int_0^A e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^A = 1 - e^{-A}.$ Or, $\lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-A} = 1$ car $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0.$

On en déduit : $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$

Exercice 51

1. $f(0) = e^0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-0} = 1.$ f est donc continue en 0.

2. D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

- $\int_{-\infty}^0 e^x dx$: sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 e^x dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} [e^x]_B^0 = \lim_{B \rightarrow -\infty} (1 - e^B) = 1 \text{ car } \lim_{B \rightarrow -\infty} e^B = 0.$$

- $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$: sous réserve de convergence,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1 \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0.$$

Finalement : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 + 1 = 2.$

Exercice 52

1. $u_0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$, $u_1 = 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1$ et $u_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$

2. $v_1 = 2v_0 - 5 = 2 \times 6 - 5 = 7$ et $v_2 = 2v_1 - 5 = 2 \times 7 - 5 = 9.$

3. $w_1 = \frac{1}{3}w_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{5}{3}$ (on a fait $n=0$),

$$w_2 = \frac{1}{3}w_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9} \quad (\text{on a fait } n=1).$$

Exercice 53

1. $u_n = u_0 + n \times r$, donc $u_{50} = 3 + 50 \times (-2) = 3 - 100 = -97.$

2. $u_n = u_1 + (n-1) \times r$, donc $u_{103} = -7 + 102 \times \frac{1}{2} = -7 + 51 = 44.$

3. $u_0 = u_n - n \times r$, donc $u_0 = u_9 - 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 7 + 6 = 13.$

4. $r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$, donc $r = \frac{u_{35} - u_5}{35 - 5} = \frac{-3 - 6}{30} = -\frac{9}{30} = -\frac{3}{10} = -0,3.$

Exercice 54

$$u_0 = 1^2 - 0^2 + 7 = 8, \quad u_1 = 2^2 - 1^2 + 7 = 10, \quad u_2 = 3^2 - 2^2 + 7 = 12 \text{ et } u_3 = 4^2 - 3^2 + 7 = 14.$$

En fait, $u_n = (n+1)^2 - n^2 + 7 = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 7 = 2n + 8$. Donc u_n est de la forme $u_n = an + b$. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison 2.

Exercice 55

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Donc :}$$

1. $1 + 2 + 3 + \dots + 1\,000 = \frac{1\,000 \times 1\,001}{2} = 500 \times 1\,001 = 500\,500.$

$$2. \quad 101+102+\dots+200=(1+\dots+200)-(1+\dots+100)=\frac{200\times 201}{2}-\frac{100\times 101}{2}$$

$$101+102+\dots+200=100\times 201-50\times 101=20\,100-5\,050=15\,050.$$

Exercice 56

1. $u_n = u_0 \times q^n$, donc $u_{10} = 2 \times 3^{10}$.
2. $v_n = v_1 \times q^{n-1}$, donc $v_{10} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{2^6}{2^9} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
3. $u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}}$, donc $u_1 = \frac{0,1875}{0,5^5} = 0,1875 \times 2^5 = 6$.
4. $q^4 = \frac{v_5}{v_1}$, donc $q^4 = \frac{162}{2} = 81 = (-3)^4$ ou 3^4 . La raison est négative donc $q = -3$.

Exercice 57

Si $q \neq 1$, $1+q+\dots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Donc :

1. $1+2+4+\dots+4\,096 = 1+2+4+\dots+2^{12} = \frac{2^{13}-1}{2-1} = 8\,192-1 = 8\,191$.
2. $3+9+\dots+3^{10} = 3(1+3+\dots+3^9) = 3 \times \frac{3^{10}-1}{3-1} = \frac{3}{2}(3^{10}-1)$.

Exercice 58

1.
$$\begin{cases} x_1 = 3x_0 + y_0 - 1 = 3+1-1 = 3 \\ y_1 = -2x_0 + 2 = -2+2 = 0 \end{cases}.$$
2. a) $r_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2(3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = 6x_n + 2y_n - 2 - 2x_n + 2 = 4x_n + 2y_n$,
 $r_{n+1} = 2(2x_n + y_n) = 2r_n$.

La suite (r_n) est géométrique de premier terme : $r_0 = 2x_0 + y_0 = 3$ et de raison 2.

b) On en déduit que $r_n = 2x_n + y_n = 3 \times 2^n$.

3. a) $s_{n+1} - s_n = (x_{n+1} + y_{n+1}) - (x_n + y_n) = 3x_n + y_n - 1 - 2x_n + 2 - x_n - y_n = 1$.

(s_n) est donc la suite arithmétique de premier terme : $s_0 = x_0 + y_0 = 2$ et de raison 1.

b) On en déduit que $s_n = x_n + y_n = n + 2$.

4. $x_n = r_n - s_n = 3 \times 2^n - n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 59

1. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$, donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique

- Recherche du point fixe : $l = -\frac{1}{2}l + 12 \Leftrightarrow l + \frac{1}{2}l = 12 \Leftrightarrow \frac{3}{2}l = 12 \Leftrightarrow l = 12 \times \frac{2}{3} = 8$.
 - On pose : $v_n = u_n - 8$, montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = -\frac{1}{2}u_n + 12 - 8 = -\frac{1}{2}u_n + 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 8) = -\frac{1}{2}v_n.$$
 (v_n) est la suite géométrique de premier terme : $v_0 = u_0 - 8 = -8$ et de raison $-\frac{1}{2}$.
 - On a finalement : $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ puis $u_n = v_n + 8 = -8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8$.
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8$.
2. $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,2$, donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
- Recherche du point fixe : $l = 0,2l + 0,2 \Leftrightarrow 0,8l = 0,2 \Leftrightarrow l = 0,25$.
 - On pose : $v_n = u_n - 0,25$, montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 0,25 = 0,2u_n + 0,2 - 0,25 = 0,2u_n - 0,05 = 0,2(u_n - 0,25) = 0,2v_n.$$
 (v_n) est la suite géométrique de premier terme : $v_1 = u_1 - 0,25 = 0,75$ et de raison $0,2$.
 - On a finalement $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,75 \times 0,2^{n-1}$ puis $u_n = v_n + 0,25 = 0,75 \times 0,2^{n-1} + 0,25$.
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$ car $|0,2| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,25$.

Exercice 60

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

- $A^0 X_0 = I \times X_0 = X_0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $X_n = A^n X_0$.
 Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$
 La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 61

- $g'(x) = e^{-x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
 - $1 \leq u_0 \leq 2$. La propriété est vraie au rang 0.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $1 \leq u_n \leq 2$.
 Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$1 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow g(1) \leq g(u_n) \leq g(2) \text{ car } g \text{ est strictement croissante.}$$

Or, $g(1) = 2 - e^{-1} \approx 1,6 > 1$, $g(2) = 2 - e^{-2} < 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

On en déduit $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ et la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 62

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ 3+5 & 4+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad 2A=\begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad -3B=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 5 & 1 \times (-1) + 2 \times 3 \\ 3 \times 2 + 4 \times 5 & 3 \times (-1) + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 26 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Enfin, } B \times A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$$

Exercice 63

$$(A-I)(A-2I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 64

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = B.$$

Exercice 65

$$C \times D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2 \text{ donc } C \text{ est inversible et } C^{-1} = \frac{1}{5}D.$$

Exercice 66

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Si } ad - bc \neq 0, \text{ alors } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 67

$$1. \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad a) \quad X^2 - (a+d)X + (ad - bc) \text{ est un polynôme annulateur de } A, \text{ c'est-à-dire } X^2 - 3X + 2$$

$$b) \quad A^2 - 3A + 2I = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 3A = -2I$$

$$\Leftrightarrow \frac{A^2 - 3A}{-2} = I$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} A-3I \\ -2 \end{pmatrix} = I$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{A-3I}{-2}$, d'où $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 68

$$1. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ puis } A^2 - A - 2I = O_2.$$

$$2. \quad A^2 - A - 2I = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - A = 2I$$

$$\Leftrightarrow \frac{A^2 - A}{2} = I$$

$$\Leftrightarrow A \left(\frac{A-I}{2} \right) = I$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{A-I}{2}$ puis $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 69

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\text{On résout le système : } (S) \quad \begin{cases} -x & + & 2z & = & a & L_1 \\ & & z & = & b & L_2 \\ & -y & + & z & = & c & L_3 \end{cases}$$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x & + & 2z & = & a & L_1 \leftarrow L_1 \\ & y & & = & b-c & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ & & z & = & b & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est triangulaire. La matrice A est donc inversible.

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -a + 2b & L_1 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ y = b - c & L_2 \leftarrow L_2 \\ z = b & L_3 \leftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C \text{ est non inversible} \quad D^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 70

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C \text{ est non inversible} \quad D^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 71

$$C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Si } C \text{ est inversible : } C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C^{-1} \times C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Impossible. Donc C n'est pas inversible.

Exercice 72

1. $A^3 - 3A^2 + 2A = O_3$.

2. Si A est inversible :

$$A^3 - 3A^2 + 2A = O_3 \Leftrightarrow A^{-1}(A^3 - 3A^2 + 2A) = A^{-1} \times O_3 \Leftrightarrow A^2 - 3A + 2I = O_3.$$

3. Calculer $A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \neq O_3$. A n'est donc pas inversible (contraposée du 2.).

Exercice 73

1. $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

2. • $\begin{pmatrix} (-1)^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = D^0$. La propriété est vraie au rang 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 74

Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0(0-1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$. La propriété est vraie au rang 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 75

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ où (a_n) est la suite définie

par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.

- $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$. La propriété est vraie au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ où (a_n) est la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + a_n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + 2a_n$, donc (a_n) est une suite arithmético-géométrique.

- Recherche du point fixe : $l = 1 + 2l \Leftrightarrow l = -1$.
- On pose : $v_n = a_n + 1$, montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = a_{n+1} + 1 = 1 + 2a_n + 1 = 2a_n + 2 = 2(a_n + 1) = 2v_n.$$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme : $v_1 = a_1 + 1 = 2$ et de raison 2.

- On a finalement $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ puis $a_n = v_n - 1 = 2^n - 1$.

On en déduit : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$

Exercice 76

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \text{ puis } AB = BA = O_3.$$

$$BA = O_3 \Leftrightarrow (N - 12I)A = O_3 \Leftrightarrow NA - 12A = O_3 \Leftrightarrow NA = 12A.$$

$$AB = O_3 \Leftrightarrow (N - 4I)B = O_3 \Leftrightarrow NB - 4B = O_3 \Leftrightarrow NB = 4B.$$

2. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $N^n = a_n A + b_n B$.

- $a_0 A + b_0 B = \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}B = \frac{1}{8}(A - B) = I_3 = N^0$. La propriété est vraie au rang 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $N^n = a_n A + b_n B$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$N^{n+1} = N \times N^n = N(a_n A + b_n B) = a_n NA + b_n NB = 12a_n A + 4b_n B = a_{n+1} A + b_{n+1} B.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $a_0 = \frac{1}{8}$ et de raison 12.

$$\text{On a donc } a_n = a_0 \times q^n = \frac{1}{8} \times 12^n.$$

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $b_0 = -\frac{1}{8}$ et de raison 4.

$$\text{On a donc } b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{8} \times 4^n.$$

c) Finalement, $M^n = \left(\frac{1}{20}\right)^n N^n = \left(\frac{1}{20}\right)^n \left(\frac{1}{8} \times 12^n A - \frac{1}{8} \times 4^n B\right),$

$$M^n = \frac{1}{8} \times \left(\frac{12}{20}\right)^n A - \frac{1}{8} \times \left(\frac{4}{20}\right)^n B = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^n B \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Exercice 77

1. $BC = CB = O_2$.

2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul $B^n = B$.

- $B = B^1$. La propriété est vraie au rang 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $B^n = B$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$B^{n+1} = B^n \times B = B \times B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = B.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul $C^n = (-1)^{n-1} C$.

- $(-1)^{1-1} C = C = C^1$. La propriété est vraie au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $C^n = (-1)^{n-1} C$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$C^{n+1} = C^n \times C = (-1)^{n-1} C \times C = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \times (-1) \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)^n C,$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calculs matriciels... On calcule A^2 puis $5A-6I$ et on constate que $A^2 = 5A-6I$.

4. $A^2 = 5A-6I \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} A-5I \\ -6 \end{pmatrix}$. A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I$.

5. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $A^n = 3^n B - 2^n C$.

- $3^0 B - 2^0 C = B - C = I = A^0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que : $A^n = 3^n B - 2^n C$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A. \text{ Or } 3B - 2C = \dots = A.$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = (3^n B - 2^n C)(3B - 2C) = 3^{n+1} B^2 - 2 \times 3^n BC - 3 \times 2^n CB + 2^{n+1} C^2.$$

$$\text{Or, } B^2 = B, BC = CB = O \text{ et } C^2 = -C. \text{ On en déduit : } A^{n+1} = 3^{n+1} B - 2^{n+1} C.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C.$$

6. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $(A^{-1})^n = \frac{1}{3^n} B - \frac{1}{2^n} C$.

- $\frac{1}{3^0} B - \frac{1}{2^0} C = I = (A^{-1})^0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que :

$$(A^{-1})^n = \frac{1}{3^n} B - \frac{1}{2^n} C. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$(A^{-1})^{n+1} = (A^{-1})^n \times A^{-1} = \left(\frac{1}{3^n} B - \frac{1}{2^n} C \right) \times \left(\frac{1}{3} B - \frac{1}{2} C \right) = \frac{1}{3^{n+1}} B + O - O - \frac{1}{2^{n+1}} C.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 78

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, donc $A^2 = -A + 2I_3$.

2. $A^2 = -A + 2I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{A+I_3}{2}\right) = I_3$. A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = u_n A + v_n I_3$.

- $u_0 A + v_0 I_3 = I_3 = A^0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que :

$$A^n = u_n A + v_n I_3. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = (u_n A + v_n I_3) \times A = u_n A^2 + v_n A = u_n (-A + 2I_3) + v_n A,$$

$$A^{n+1} = (-u_n + v_n) A + 2u_n I_3 = u_{n+1} A + v_{n+1} I_3. \text{ La propriété est donc vraie au rang } n+1.$$

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a) $x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = -u_n + v_n + 2u_n = u_n + v_n = x_n$. (x_n) est constante. Donc $x_n = x_0 = 1$.

b) $y_{n+1} = 2u_{n+1} - v_{n+1} = 2(-u_n + v_n) - (2u_n) = -2u_n + 2v_n - 2u_n = -4u_n + 2v_n,$

$$y_{n+1} = -2(2u_n - v_n) = -2y_n. (y_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } y_0 = -1$$

et de raison -2 . On en déduit : $y_n = y_0 \times q^n = -(-2)^n$.

c) $x_n + y_n = 3u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n$ puis $v_n = x_n - u_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n$.

5. $A^n = u_n A + v_n I_3$, donc $A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right] \cdot A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right] \cdot I_3$ pour tout entier $n \geq 0$.

6. $\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{-1}\right] \cdot A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{-1}\right] \cdot I_3 = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right] \cdot A + \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right] \cdot I_3 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = A^{-1}$ (d'après la question 2.). Cette formule est encore valable pour $n = -1$.

Exercice 79

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k \text{ puis } (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Exercice 80

1. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = O_3$.

Lorsque $k \geq 3$, $N^k = N^3 \times N^{k-3} = O_3$.

2. $A^n = (N + I)^n$. D'après la formule du binôme :

$$A^n = (N + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \times I^{n-k} = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2. \text{ D'où :}$$

$$A^n = I + n \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } n \geq 2.$$

$$\text{Pour } n=0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0(0-1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0. \text{ La formule est encore valable pour } n=0.$$

$$\text{Pour } n=1, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1(1-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1. \text{ La formule est encore valable pour } n=1.$$

$$3. \text{ a) On trouve : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La formule de la question 2. est encore valable lorsque $n = -1$.

Exercice 81

$$1. \text{ a) } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B^3 = O_3.$$

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 3, $B^k = B^3 \times B^{k-3} = O_3$.

2. $A = B + 3I$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (B + 3I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \times (3I)^{n-k} = 3^n I + n \times 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} \times 3^{n-2} B^2,$$

$$A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).$$

$$\text{Pour } n=0, 3^0 \left(I + \frac{0}{3} B + \frac{0(0-1)}{18} B^2 \right) = I = A^0. \text{ La formule est vraie pour } n=0.$$

$$\text{Pour } n=1, 3^1 \left(I + \frac{1}{3} B + \frac{1(1-1)}{18} B^2 \right) = 3I + B = A = A^1. \text{ La formule est vraie pour } n=1.$$

Exercice 82

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + N.$$

$$\bullet \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = O_3 \text{ et, lorsque } k \geq 3, \quad N^k = N^3 \times N^{k-3} = O_3.$$

$$\bullet \quad A^n = (N + I)^n. \text{ D'après la formule du binôme :}$$

$$A^n = (N + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \times I^{n-k} = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2. \text{ D'où :}$$

$$A^n = I + n \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } n \geq 2.$$

Exercice 83

$$1. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Si } ad - bc \neq 0, \text{ alors } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$1 \times 1 - (-1) \times 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0. \quad P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ a) } AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ puis } P^{-1}(AP) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On note également que } B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = (PP^{-1})AP \Leftrightarrow PB = AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}.$$

$$\text{b) } B \text{ est diagonale, donc } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) Démontrons par récurrence que : } \forall n \geq 0, \quad A^n = P B^n P^{-1}.$$

$$\bullet \quad P B^0 P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I = A^0. \text{ La propriété est vraie au rang } 0.$$

$$\bullet \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On suppose que la propriété est vraie au rang } n, \text{ c'est-à-dire que :}$$

$$A^n = P B^n P^{-1}. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = (P B^n P^{-1}) \times (P B P^{-1}) = P B^n (P^{-1} P) B P^{-1} = P B^n I B P^{-1} = P B^{n+1} P^{-1}.$$

$$\text{La propriété est donc vraie au rang } n+1.$$

$$\bullet \quad \text{Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Finalement :

$$P \times B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix} \text{ puis}$$

$$A^n = (PB^n)P^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^n & -1+2^n \\ -1+2^n & 1+2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 84**12.1.**

1. D est diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (3/4)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n non nul.

2. $PQ = 3I_3$, donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$.

3. Calcul matriciel classique : $P^{-1}MP = D$.

4. $P^{-1}MP = D \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$ puis récurrence identique à celle de l'exercice 83.

5. $M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}/2^{2n} & 0 & 3^{n-1}/2^{2n-1} \\ 1-3^{n-1}/2^{2n-1} & 1 & 1-3^{n-1}/2^{2n-2} \\ 3^{n-1}/2^{2n} & 0 & 3^{n-1}/2^{2n-1} \end{pmatrix}$

12.2.

1. $M \times X_n = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \cdot u_n + 1/2 \cdot w_n \\ 1/2 \cdot u_n + v_n \\ 1/4 \cdot u_n + 1/2 \cdot w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$

2. a) On en déduit que $X_n = M^n \times X_0$ (démonstration par récurrence) pour tout $n \geq 1$.

b) Il vient : $X_n = \begin{pmatrix} 3^{n-1}/2^{2n} & 0 & 3^{n-1}/2^{2n-1} \\ 1-3^{n-1}/2^{2n-1} & 1 & 1-3^{n-1}/2^{2n-2} \\ 3^{n-1}/2^{2n} & 0 & 3^{n-1}/2^{2n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}/2^{2n-1} \\ 1-3^{n-1}/2^{2n-2} \\ 3^{n-1}/2^{2n-1} \end{pmatrix}$, d'où

$$u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{2n-1}} = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n, \quad v_n = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{3^{n-1}}{2^{2n-1}} = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$ car $\left| \frac{3}{4} \right| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

Exercice 85

1. $A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P \times D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$A \times P = P \times D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ donc A est diagonalisable.

2. $A^n = PD^nP^{-1}$ (démonstration par récurrence).

Exercice 86

1. $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Donc $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A .

Les valeurs propres possibles de A sont racines de $X^2 - 3X + 2$, donc 1 et 2 sont valeurs propres possibles.

2. $(A-I)(A-2I)(A-3I) = O_3$. $(X-1)(X-2)(X-3)$ est un polynôme annulateur de A .

Ses racines : 1, 2 et 3 sont les valeurs propres possibles de la matrice A .

Exercice 87

On admet que les résultats de l'exercice 86 sont acquis.

1. $\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

P est obtenue en juxtaposant des vecteurs colonnes qui sont des vecteurs propres de A .

2. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 1.

$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 2.

$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 3.

P est obtenue en juxtaposant des vecteurs colonnes qui sont des vecteurs propres de A .

Exercice 88

1. $X^2 - 5X + 6$ est un polynôme annulateur de A . Les valeurs propres possibles sont 2 et 3.
2. Vecteurs propres associés à la valeur propre éventuelle 2 :

On recherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 6y = 2x \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$.

Les vecteurs propres de A associés à 2 sont de la forme $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Vecteurs propres associés à la valeur propre éventuelle 3 :

On recherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 6y = 3x \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y.$

Les vecteurs propres de A associés à 3 sont de la forme $\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

3. On en déduit : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Après calculs, $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$.

Exercice 89

1. a) $1^3 + 1^2 - 10 + 8 = 0$. 1 est racine évidente de Q .

b) Hörner ou division euclidienne : $X^3 + X^2 - 10X + 8 = (X - 1)(X^2 + 2X - 8)$.

Or, $X^2 + 2X - 8 = (X + 4)(X - 2)$ (par Δ).

Donc $X^3 + X^2 - 10X + 8 = (X - 1)(X - 2)(X + 4)$.

c) 1, 2 et -4 sont racines de Q .

2. Évident... $A^3 + A^2 - 10A + 8I_3 = O_3$.

3. 1, 2 et -4 sont les valeurs propres possibles de A .

4. Vecteurs propres associés à la valeur propre éventuelle 1 :

On recherche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$

(après calculs). Les vecteurs propres de A associés à 1 sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Finalement, on trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ puis $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 90

Q est un polynôme annulateur de A .

On trouve 2 et 4 (double) comme valeurs propres possibles puis :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \times 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 91

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,2 + 0,5 - 0,6 = 0,1.$$

Exercice 92

1. $3/8$ 2. $7/8$

Exercice 93

1. $4/25$ 2. $9/25$

Exercice 94

1. 8^3 2. $8 \times 7 \times 6$ 3. $\binom{8}{3} = 56$

Exercice 95

1. $\binom{12}{8} = 495$; $\binom{5}{4} = 5$ 2. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 3. $A = 40$, $B = 19$.

Exercice 96

1. $p(\overline{A \cup B}) = 0,35$ donc $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,35 = 0,65$.

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,25.$$

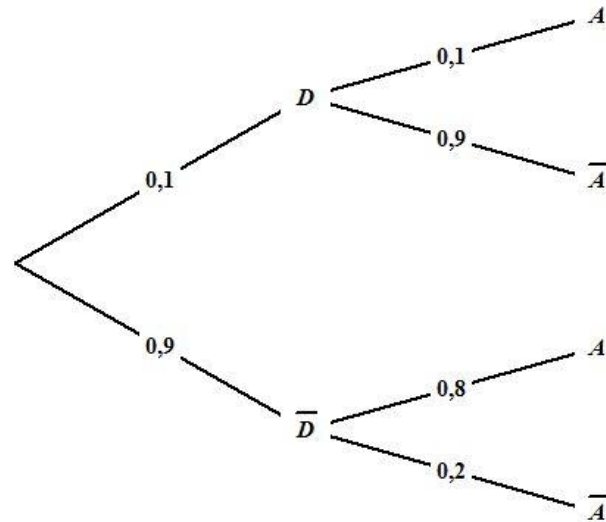
2. $p(A \cap B) = 0,1$, $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}$ et $p_A(B) = \frac{1}{2}$.

3. $p_B(A) = 0,8$. Oui.

4. $p(B \cap A) = p(A) \times p_A(B)$, donc $p(A) = \frac{2}{3}$.

Exercice 97

1. a)



b) On admet que 10 % des appareils présentent un défaut. Donc $P(D) = 0,1$.

On en déduit $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Le contrôle refuse 90 % des appareils avec défaut. Donc $P_D(\bar{A}) = 0,9$.

On en déduit $P_D(A) = 1 - P_D(\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$.

Le contrôle accepte 80 % des appareils sans défaut. Donc $P_{\bar{D}}(A) = 0,8$.

2. $P(A \cap D) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,1 = 0,01$.

$$P(A \cap \bar{D}) = P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(A) = 0,9 \times 0,8 = 0,72.$$

3. D et $\bar{D}$ constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D}) = 0,01 + 0,72 = 0,73$.

4. La probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle

$$\text{est : } P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,73} = \frac{1}{73}.$$

Exercice 98

1. On note A , l'événement « le comprimé est produit par la machine A », B , l'événement « le comprimé est produit par la machine B », C , l'événement « le comprimé est produit par la machine C » et D , l'événement « le comprimé est défectueux ».

A , B et C constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$,

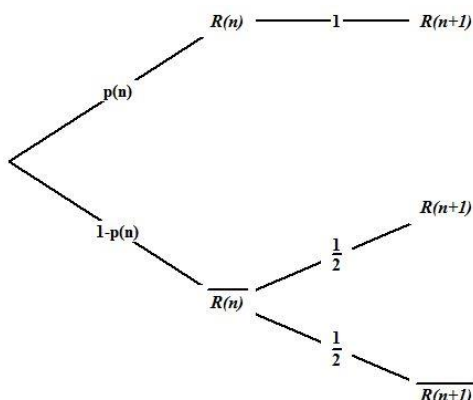
$$P(D) = 0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,015 + 0,012 + 0,010 = 0,037.$$

$$2. \quad P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,037} = \frac{15}{37}.$$

Exercice 99

1. a) Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $3/4$. Donc $p_1 = 3/4$.

b) On a :



R_n et $\overline{R_n}$ constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, $P(R_{n+1}) = P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$,

$$p_{n+1} = p_n \times 1 + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2}.$$

2. $p_1 = 3/4$, $p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2}$, donc (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

- Recherche du point fixe : $l = \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \Leftrightarrow l = 1$.

- On pose : $v_n = p_n - 1$, montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - 1 = 0,5 p_n + 0,5 - 1 = 0,5 p_n - 0,5 = 0,5(p_n - 1) = 0,5 v_n.$$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme : $v_1 = p_1 - 1 = -0,25$ et de raison 0,5.

- On a finalement $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -0,25 \times 0,5^{n-1}$ puis $p_n = v_n + 1 = 1 - 0,25 \times 0,5^{n-1}$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car $|0,5| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

Exercice 100

1. Chaque jeton rapporte 1 à 6 euros et la mise est de 3 euros. Donc $X(\Omega) = \llbracket -2, 3 \rrbracket$.

2. Il y a 6 jetons numérotés 1 sur les 21. Donc $p(X = -2) = \frac{6}{21}$.

On procède de la même façon pour les autres valeurs pour obtenir la loi de probabilité :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$3. E(X) = \frac{6}{21} \times (-2) + \frac{5}{21} \times (-1) + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{3}{21} \times 1 + \frac{2}{21} \times 2 + \frac{1}{21} \times 3 = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}.$$

$$4. E(X^2) = \frac{6}{21} \times (-2)^2 + \frac{5}{21} \times (-1)^2 + \frac{4}{21} \times 0^2 + \frac{3}{21} \times 1^2 + \frac{2}{21} \times 2^2 + \frac{1}{21} \times 3^2$$

$$E(X^2) = \frac{6}{21} \times 4 + \frac{5}{21} \times 1 + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{3}{21} \times 1 + \frac{2}{21} \times 4 + \frac{1}{21} \times 9 = \frac{49}{21} = \frac{7 \times 7}{7 \times 3} = \frac{7}{3}$$

On en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{9} = \frac{21-1}{9} = \frac{20}{9}.$$

Exercice 101

$$1. E(X) = 0,4 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,2 \times 3 + 0,1 \times 4 = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,4 = 2.$$

$$2. E(X^2) = 0,4 \times 1^2 + 0,3 \times 2^2 + 0,2 \times 3^2 + 0,1 \times 4^2 = 0,4 + 1,2 + 1,8 + 1,6 = 5$$

On en déduit : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$ puis $\sigma = \sqrt{1} = 1$.

$$3. E(aX + b) = aE(X) + b, \text{ donc } E(Y) = E(3X + 1) = 3E(X) + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7.$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X), \text{ donc } V(Y) = V(3X + 1) = 3^2 V(X) = 9 \times 1 = 9.$$

Exercice 102

$$1. E(X) = 0,25 \times 0 + 0,5 \times 2 + 0,25 \times 4 = 2.$$

$$2. E(X^2) = 0,25 \times 0^2 + 0,5 \times 2^2 + 0,25 \times 4^2 = 6$$

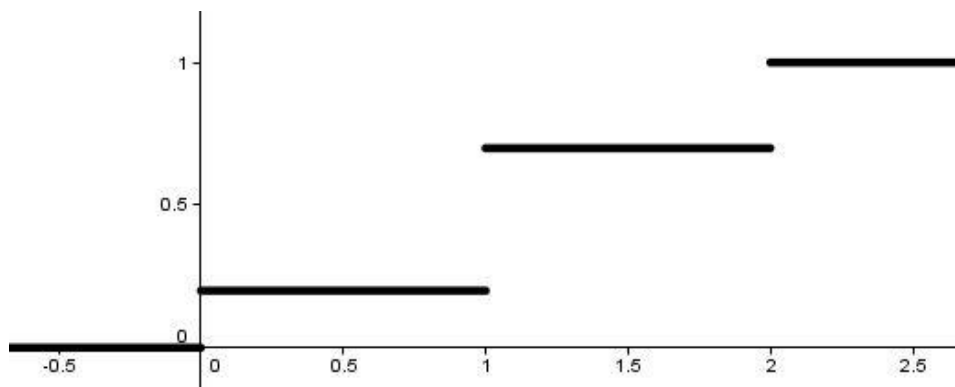
On en déduit : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6 - 2^2 = 2$ puis $\sigma = \sqrt{2}$.

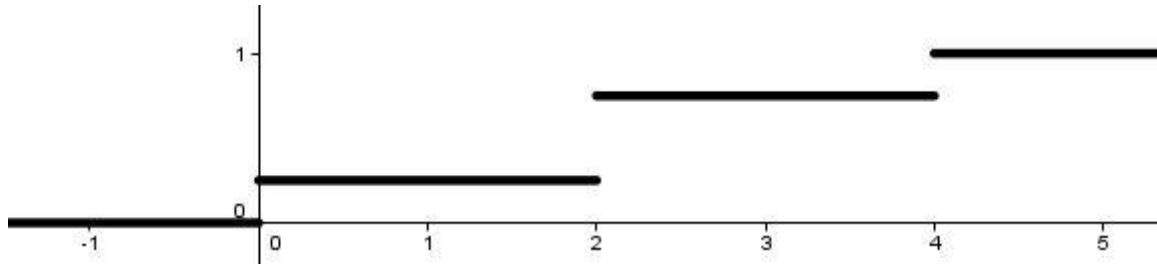
$$3. E(aX + b) = aE(X) + b, \text{ donc } E(Y) = E(2X - 3) = 2E(X) - 3 = 2 \times 2 - 3 = 1.$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X), \text{ donc } V(Y) = V(2X - 3) = 2^2 V(X) = 4 \times 2 = 8.$$

Exercice 103

- Si $x < 0$, $F(x) = P(X \leq x) = 0$
- Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = P(X \leq x) = 0,2$
- Si $1 \leq x < 2$, $F(x) = P(X \leq x) = 0,2 + 0,5 = 0,7$
- Si $x \geq 2$, $F(x) = P(X \leq x) = 1$



Exercice 104**Exercice 105**

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$: série géométrique avec $q = \frac{1}{2}$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n \times 2^{-1}} = 2 \times \frac{1}{2^n}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \times 2 = 4$
6. $\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \times 2^1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$: série géométrique dérivée avec $q = \frac{1}{2}$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$.
8. $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1} \times 2^1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$: série exponentielle avec $x=1$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$
10. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \dots = \frac{1}{3} \left(3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - 1 \right) = \frac{e^3 - 1}{3}$.

Exercice 106

Démontrons que $\sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k) = 1$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{4^k} = 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = 3 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} \right) = 3 \left(\frac{1}{1-1/4} - 1 \right) = 3 \left(\frac{4}{3} - 1 \right) = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Exercice 107

1. On effectue 180 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le 6 est obtenu, avec la probabilité $1/6$;
- échec : le 6 n'est pas obtenu, avec la probabilité $5/6$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 180 et $1/6$.

2. $X(\Omega) = \llbracket 0, 180 \rrbracket$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{180}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{180-k}$.

3. $E(X) = n \times p = 180 \times \frac{1}{6} = 30$. $V(X) = n p(1-p) = 30 \times \frac{5}{6} = 25$. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 5$.

Exercice 108

1. a) On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'appareil présente un défaut, avec la probabilité $0,1$;
- échec : l'appareil ne présente pas de défaut, avec la probabilité $0,9$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et $0,1$.

b) $X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{10}{k} (0,1)^k (0,9)^{10-k}$.

c) $E(X) = n \times p = 10 \times 0,1 = 1$. $V(X) = n p(1-p) = 1 \times 0,9 = 0,9$.

2. $P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10-0} = 0,9^{10}$. 3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{10}$.

Exercice 109

1. On effectue n épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le sportif est déclaré positif, avec la probabilité $0,2$;
- échec : le sportif n'est pas déclaré positif, avec la probabilité $0,8$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres n et $0,2$.

$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{n}{k} (0,2)^k (0,8)^{n-k}$.

2. $E(X) = n \times p = 0,2n$. $V(X) = n p(1-p) = 0,2n \times 0,8 = 0,16n$. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,4\sqrt{n}$.

3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{n}{0} (0,2)^0 (0,8)^n - \binom{n}{1} (0,2)^1 (0,8)^{n-1}$,

$P(X \geq 2) = 1 - 0,8^n - 0,2n \times 0,8^{n-1}$.

Exercice 110

On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'appareil est sans défaut, avec la probabilité 0,95 ;
- échec : l'appareil présente un défaut, avec la probabilité 0,05.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et 0,95.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket \text{ et, pour tout } k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{10}{k} (0,95)^k (0,05)^{10-k}.$$

Exercice 111

1. On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : on obtient « pile », avec la probabilité 0,3 ;
- échec : on obtient « face », avec la probabilité 0,7.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et 0,3.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket \text{ et, pour tout } k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{10}{k} (0,3)^k (0,7)^{10-k}.$$

$$\text{En particulier, } P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,3)^3 (0,7)^{10-3} = 120 \times 0,3^3 \times 0,7^7.$$

2. On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : on obtient « pile », avec la probabilité 0,3 ;
- échec : on obtient « face », avec la probabilité 0,7.

Soit Y le temps d'attente du premier succès.

Y suit donc la loi géométrique de paramètre 0,3.

$$\text{On a donc : } E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}.$$

Exercice 112

On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'appel est suivi d'un retard, avec la probabilité 0,25 ;
- échec : l'appel n'est pas suivi d'un retard, avec la probabilité 0,75.

U est le temps d'attente du premier succès.

U suit donc la loi géométrique de paramètre 0,25.

$$\text{On a donc : } E(U) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,25} = 4.$$

Exercice 113

1. $P(X \leq 2)$: lecture directe de la table 1 pour $m=1$. $P(X \leq 2) \approx 0,9197$.

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) \approx 0,9197 - 0,7358 \approx 0,1839.$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,3679 \approx 0,6321.$$

2. $P(X = 2)$: lecture directe de la table 2 pour $m = 1$. $P(X = 2) \approx 0,1839$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 \approx 0,9197.$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,3679 \approx 0,6321.$$

3. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-1} \frac{1}{0!} + e^{-1} \frac{1}{1!} + e^{-1} \frac{1}{2!} = \frac{5}{2e}$.

$$P(X = 2) = e^{-1} \frac{1}{2!} = \frac{1}{2e}. \text{ Enfin, } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{e}.$$

Exercice 114

1. On effectue N épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : la partie est gagnée, avec la probabilité 0,1 ;
- échec : la partie est perdue, avec la probabilité 0,9.

X_N compte le nombre de succès.

X_N suit donc la loi binomiale de paramètres N et 0,1.

$$X_N(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket \text{ et, pour tout } k \in X_N(\Omega), P(X_N = k) = \binom{N}{k} (0,1)^k (0,9)^{N-k}.$$

$$E(X_N) = n \times p = 0,1N. V(X_N) = n p(1-p) = 0,1N \times 0,9 = 0,09N.$$

2. Le joueur mise 1 euro pour chacune des N parties et gagne 3 euros pour chacune des X_N parties gagnées. Autrement dit, $Y_N = 3X_N - N$.

$$\text{On en déduit : } V(Y_N) = 3^2 V(X_N) = 9 \times 0,09N = 0,81N.$$

3. $p(Y_{60} \geq -50) = p(3X_{60} - 60 \geq -50) = p\left(X_{60} \geq \frac{10}{3}\right) \approx 1 - p(X' \leq 3)$ où $X' \hookrightarrow P(6)$.

$$\text{Par lecture d'une table, } p(Y_{60} \geq -50) \approx 1 - 0,1512 = 0,8488.$$

4. a) On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : la partie est gagnée, avec la probabilité 0,1 ;
- échec : la partie est perdue, avec la probabilité 0,9.

Z est le temps d'attente du premier succès.

Z suit donc la loi géométrique de paramètre 0,1.

- b) Le joueur a misé Z euros et a gagné une fois : $T = 3 - Z$.

$$E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10, \text{ donc } E(T) = 3 - E(Z) = 3 - 10 = -7.$$

5. On cherche N tel que : $E(Y_N) = E(T)$ avec $E(Y_N) = 3E(X_N) - N = 0,3N - N = -0,7N$.

$$\text{Il vient : } -0,7N = -7 \Leftrightarrow N = 10.$$

Exercice 115

1. $[X = 0]$ et $[X = 1]$ constituent un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P([Y = 2]) = P([Y = 2] \cap [X = 0]) + P([Y = 2] \cap [X = 1]) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

2. $X \hookrightarrow B(0,6)$; loi de Y :

$Y = k$	0	1	2
$P(Y = k)$	0,2	0,3	0,5

3. $P_{[Y=2]}([X = 0]) = \frac{P([Y = 2] \cap [X = 0])}{P([Y = 2])} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$

Exercice 116

Avec remise : $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1\}$. $P[X = 0 \cap Y = 0] = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$;

$$P[X = 0 \cap Y = 1] = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49} ; P[X = 1 \cap Y = 0] = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49} ; P[X = 1 \cap Y = 1] = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}.$$

On en déduit :

Y			
X	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{28}{49} = \frac{4}{7}$
$X = 1$	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{21}{49} = \frac{3}{7}$
Loi de Y	$\frac{28}{49} = \frac{4}{7}$	$\frac{21}{49} = \frac{3}{7}$	1

Sans remise : $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1\}$. $P[X = 0 \cap Y = 0] = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$;

$$P[X = 0 \cap Y = 1] = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7} ; P[X = 1 \cap Y = 0] = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7} ; P[X = 1 \cap Y = 1] = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

On en déduit :

Y			
X	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
$X = 1$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
Loi de Y	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

Exercice 117

1. La loi du couple (X, Y) est la suivante :

Y X	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$X = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$P[X = 0 \cap Y = 0] = P[X = 0] \times P[Y = 0] ; P[X = 0 \cap Y = 1] = P[X = 0] \times P[Y = 1]$$

$$P[X = 1 \cap Y = 0] = P[X = 1] \times P[Y = 0] ; P[X = 1 \cap Y = 1] = P[X = 1] \times P[Y = 1]$$

Les variables X et Y sont indépendantes.

2. $U = X + Y$, donc $U(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$. $V = X \cdot Y$, donc $V(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$.

$$[U = 2] = [X = 1] \cap [Y = 1] = [V = 1]. \text{ Donc :}$$

$$p([U = 2] \cap [V = 0]) = 0, \quad p([U = 0] \cap [V = 1]) = 0 \text{ et } p([U = 1] \cap [V = 1]) = 0.$$

$$\text{De plus, } p([U = 2] \cap [V = 1]) = p([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Enfin, } p([U = 0]) = p([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6}.$$

On déduit aisément les éléments manquants du tableau...

V U	$V = 0$	$V = 1$	Loi de U
$U = 0$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$U = 1$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$U = 2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Loi de V	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Exercice 118

1. $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. $Y = X^2$, donc $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$p([X = -1]) = p([X = 0]) = p([X = 1]) = \frac{1}{3}.$$

$$p([Y = 0]) = p([X = 0]) = p([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{3}.$$

Enfin, $p([X = -1] \cap [Y = 0]) = 0$ et $p([X = 1] \cap [Y = 0]) = 0$.

On déduit aisément les éléments manquants du tableau...

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = -1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$X = 0$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$X = 1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ avec $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{2}{3}$ et :

$$E(XY) = \sum x_i \times y_j \times P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = -1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = 0.$$

Donc $\text{cov}(X, Y) = 0$. Or X et Y ne sont pas indépendantes car

$p([X = 0] \cap [Y = 0]) \neq p([X = 0]) \times p([Y = 0])$. Les propositions $\text{cov}(X, Y) = 0$ et « X et Y sont indépendantes » ne sont donc pas équivalentes.

2. $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$. $Y = X^2$, donc $Y(\Omega) = \{1, 4\}$.

$$p([X = -2]) = p([X = -1]) = p([X = 1]) = p([X = 2]) = 0,25.$$

$$p([X = -2] \cap [Y = 1]) = p([X = 2] \cap [Y = 1]) = 0.$$

$$p([X = -1] \cap [Y = 4]) = p([X = 1] \cap [Y = 4]) = 0.$$

On déduit aisément les éléments manquants du tableau...

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	$Y = 1$	$Y = 4$	Loi de X
$X = -2$	0	0,25	0,25
$X = -1$	0,25	0	0,25
$X = 1$	0,25	0	0,25
$X = 2$	0	0,25	0,25
Loi de Y	0,5	0,5	1

$E(X) = 0$, $E(Y) = 2,5$ et $E(XY) = 0$, donc $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Même conclusion : il s'agit d'un contre-exemple à l'affirmation erronée :

$\text{cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ et Y indépendantes.

Exercice 119

$X \setminus Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	Loi de X
$X = 0$	$1/20$	$1/4$	0	$3/10$
$X = 1$	$17/60$	$1/4$	$1/6$	$7/10$
Loi de Y	$1/3$	$1/2$	$1/6$	1

$p([X = 0] \cap [Y = 0]) \neq p([X = 0]) \times p([Y = 0])$. X et Y ne sont pas indépendantes.

$E(X) = 7/10$, $E(Y) = 5/6$ et $E(XY) = 7/12$, donc $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Même conclusion que l'exercice précédent.

Exercice 120

1. $S \hookrightarrow \mathcal{B}(0, 3)$ et $U \hookrightarrow \mathcal{B}(0, 4)$.

2. On a :

$S \setminus U$	$U = 0$	$U = 1$	Loi de S
$S = 0$	$0,4$	$0,3$	$0,7$
$S = 1$	$0,2$	$0,1$	$0,3$
Loi de U	$0,6$	$0,4$	1

$E(S) = 0,3$, $E(U) = 0,4$ et $E(SU) = 0,1$, donc $\text{cov}(U, V) = -0,02$.

$\text{cov}(U, V) \neq 0$ donc les variables S et U ne sont pas indépendantes.

3. On demande $P_{[U=1]}[S=1] = \frac{P[S=1 \cap U=1]}{P[U=1]} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

Exercice 121

1. a) On effectue n épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le forfait n°1 est choisi, avec la probabilité $1/3$;
- échec : un autre forfait est choisi, avec la probabilité $2/3$.

X_1 compte le nombre de succès.

X_1 suit donc la loi binomiale de paramètres n et $1/3$.

$$X_1(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et, pour tout } k \in X_1(\Omega), P(X_1 = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

$$\text{b) } E(X_1) = n \times p = \frac{n}{3}. V(X_1) = n p(1-p) = \frac{n}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}.$$

c) Idem pour X_2 et X_3 .

2. a) Il y a n clients au total. Donc $X_1 + X_2 + X_3 = n$ et donc $X_1 + X_2 = n - X_3$.

$$V(aX + b) = a^2 V(X). \text{ On en déduit : } V(X_1 + X_2) = V(n - X_3) = (-1)^2 V(X_3) = \frac{2n}{9}.$$

b) Dans le cas général, $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)$. D'où :

$$2 \operatorname{cov}(X_1, X_2) = V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2) = \frac{2n}{9} - \frac{2n}{9} - \frac{2n}{9} = -\frac{2n}{9}.$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9} \neq 0. \text{ Les variables } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

3. D'après l'énoncé, $H = 10X_1 + 20X_2 + 30X_3$.

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$. On a donc :

$$E(H) = 10E(X_1) + 20E(X_2) + 30E(X_3) = 10 \times \frac{n}{3} + 20 \times \frac{n}{3} + 30 \times \frac{n}{3} = 60 \times \frac{n}{3} = 20n.$$

Exercice 122

1. a) On effectue 3 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : une boule rouge est tirée, avec la probabilité $2/3$;
- échec : la boule verte est tirée, avec la probabilité $1/3$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 3 et $2/3$.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket \text{ et, pour tout } k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}.$$

$$\text{b) } E(X) = n \times p = 2. \quad V(X) = n p(1-p) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2) a) • $[(X=2) \cap (Y=1)] = (R_1 \cap R_2 \cap V_3) \cup (R_1 \cap V_2 \cap R_3)$, donc :

$$p([(X=2) \cap (Y=1)]) = p((R_1 \cap R_2 \cap V_3) \cup (R_1 \cap V_2 \cap R_3)),$$

$$p([(X=2) \cap (Y=1)]) = p(R_1 \cap R_2 \cap V_3) + p(R_1 \cap V_2 \cap R_3) \text{ par incompatibilité,}$$

$$p([(X=2) \cap (Y=1)]) = p(R_1) \times p(R_2) \times p(V_3) + p(R_1) \times p(V_2) \times p(R_3) \text{ par indépendance,}$$

$$p([(X=2) \cap (Y=1)]) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

• $[(X=1) \cap (Y=3)] = V_1 \cap V_2 \cap R_3$, donc :

$$p([(X=1) \cap (Y=3)]) = p(V_1 \cap V_2 \cap R_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27} \text{ par indépendance.}$$

• $[(X=3) \cap (Y=2)] = \emptyset$ car si trois boules rouges sont tirées, la première est obtenue dès le premier tirage. Donc $p([(X=3) \cap (Y=2)]) = 0$.

b) Loi du couple (X, Y) :

$X \setminus Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$X = 1$	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$
$X = 2$	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
$X = 3$	0	$\frac{8}{27}$	0	0	$\frac{8}{27}$
Loi de Y	$\frac{1}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	1

$$[(X=0) \cap (Y=0)] = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \text{ donc } p([(X=0) \cap (Y=0)]) = \frac{1}{27}.$$

$$[(X=3) \cap (Y=0)] = \emptyset \text{ car trois boules rouges sont tirées.}$$

c) et d) Voir tableau.

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{18}{27} + 2 \times \frac{6}{27} + 3 \times \frac{2}{27} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}.$$

e) Les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque, par exemple :

$$p([(X=0) \cap (Y=0)]) \neq p([X=0]) \times p([Y=0]).$$

$$E(X) = 2, E(Y) = 4/3 \text{ et } E(XY) = 68/27, \text{ donc } \text{cov}(X, Y) = -4/27.$$

Exercice 123

1. a) On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : la boule noire est tirée, avec la probabilité $1/n$;
- échec : la boule blanche est tirée, avec la probabilité $(n-1)/n$.

X est le temps d'attente du premier succès.

X suit donc la loi géométrique de paramètre $1/n$.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } k \text{ de } X(\Omega), P(X=k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \times \frac{1}{n}.$$

b) Le nombre moyen de tirages nécessaire à l'obtention de la boule noire est :

$$E(X) = \frac{1}{p} = n.$$

2. a) $P(Y=1) = P(N_1) = \frac{1}{n}.$

$$P(Y=2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

$$P(Y=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

- b) Pour tout k de $\llbracket 4, n \rrbracket$, $P(Y = k) = P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k)$, donc, d'après la formule des probabilités composées, $P(Y = k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \dots \times P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k)$,

$$P(Y = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}.$$

Y suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

c) $E(Y) = \frac{n+1}{2}.$

Exercice 124

1. Montrons que f est une densité de probabilité :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 3 \times 0^2 = 0$. f est donc continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 3 \times 1^2 = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0. f \text{ n'est donc pas continue en } 1.$$

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Étude de la positivité de f :
 - Pour $x < 0$, $f(x) = 0 \geq 0$.
 - Pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 3x^2 \geq 0$.
 - Pour $x > 1$, $f(x) = 0 \geq 0$.

f est donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

- Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

$$\text{D'après la relation de Chasles, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0 \text{ car } f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} f(t) dt = 0 \text{ car } f(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 3t^2 dt = \left[t^3 \right]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1. \text{ On en déduit : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

2. Déterminons la fonction de répartition F de X . On a : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

- Si $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

- Si $0 \leq x \leq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt, \text{ d'après la relation de Chasles,}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 3t^2 dt = 0 + \left[t^3 \right]_0^x = x^3 - 0^3 = x^3.$$

- Si $x > 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt, \text{ d'après la relation de Chasles,}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 3t^2 dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

3. • Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_0^1 t f(t) dt + \int_1^{+\infty} t f(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 t f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_1^{+\infty} t f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x > 1$.

$$\int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 3t^3 dt = \left[\frac{3}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4} \times 1^4 - \frac{3}{4} \times 0^4 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{On en déduit : } \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 0 + \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}.$$

X admet donc une espérance et $E(X) = \frac{3}{4}$.

• Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt + \int_0^1 t^2 f(t) dt + \int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt.$$

Or, $\int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x > 1$

$$\int_0^1 t^2 f(t) dt = \int_0^1 3t^4 dt = \left[\frac{3}{5} t^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5} \times 1^5 - \frac{3}{5} \times 0^5 = \frac{3}{5}.$$

$$\text{On en déduit : } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = 0 + \frac{3}{5} + 0 = \frac{3}{5}.$$

X admet donc une variance et $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16}$.

$$V(X) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48 - 45}{80} = \frac{3}{80}.$$

Exercice 125

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrons que f est une densité de probabilité :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = e^{-0} = 1$. f n'est donc pas continue en 0.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- Étude de la positivité de f :
 - Pour $x < 0$, $f(x) = 0 \geq 0$.
 - Pour $x \geq 0$, $f(x) = e^{-x} \geq 0$.

f est donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

- Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$.

Sous réserve de convergence, $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t) dt$.

$$\int_0^A f(t) dt = \int_0^A e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^A = -e^{-A} + 1. \text{ Par suite, } \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = 1.$$

On a donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + 1 = 1$.

2. Déterminons la fonction de répartition F de X . On a : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

• Si $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

• Si $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt, \text{ d'après la relation de Chasles,}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt = 0 + \left[-e^{-t} \right]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

3. • Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_0^{+\infty} t f(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 t f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$.

Sous réserve de convergence, $\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t f(t) dt$. $\int_0^A t f(t) dt = \int_0^A t e^{-t} dt$

.

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues et dérivables sur $[0, A]$.

On pose : $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$. On a :

$$u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v(t) = -e^{-t}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$\int_0^A t e^{-t} dt = \left[-t e^{-t} \right]_0^A - \int_0^A 1 \times (-e^{-t}) dt = \left[-t e^{-t} \right]_0^A - \left[e^{-t} \right]_0^A = -A e^{-A} - e^{-A} + 1.$$

De plus, $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} A e^{-A} = 0$ par croissances comparées.

Finalement, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t e^{-t} dt = 1$.

On a donc $\int_0^{+\infty} t f(t) dt = 1$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 0 + 1 = 1$.

X admet donc une espérance et $E(X) = 1$.

- Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt + \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$.

Sous réserve de convergence, $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^2 f(t) dt$.

Avec $\int_0^A t^2 f(t) dt = \int_0^A t^2 e^{-t} dt$.

Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues et dérivables sur $[0, A]$.

On pose : $u(t) = t^2$ et $v'(t) = e^{-t}$. On a :
 $u'(t) = 2t$ et $v(t) = -e^{-t}$.

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$\int_0^A t^2 e^{-t} dt = \left[-t^2 e^{-t} \right]_0^A - \int_0^A 2t (-e^{-t}) dt = -A^2 e^{-A} + 2 \int_0^A t e^{-t} dt.$$

Or, on a vu que $\int_0^A t e^{-t} dt = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1$.

Il vient : $\int_0^A t^2 e^{-t} dt = -A^2 e^{-A} - 2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2$.

De plus, $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} Ae^{-A} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^2 e^{-A} = 0$ par croissances comparées.

Finalement, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^2 e^{-t} dt = 2$.

X admet donc une variance et $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - (E(X))^2 = 2 - 1^2 = 1$.

4. On a : $P(-2 \leq X \leq 1/4) = \int_{-2}^{1/4} f(t) dt = \int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^{1/4} f(t) dt$, mais on a aussi plus simplement : $P(-2 \leq X \leq 1/4) = F(1/4) - F(-2) = 1 - e^{-1/4} - 0 = 1 - e^{-1/4}$.

Exercice 126

1. Si $x \geq 0$, $\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{kv'}{v^2}$, donc $f'(x) = -\frac{2(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = -h(x)$.

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ donc } g'(x) = -2 \frac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})} = -2 \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})} = 2 \frac{e^{-x} \times e^x}{(1+e^{-x}) \times e^x} = \frac{2}{e^x + 1} = f(x).$$

2. Soit $A \geq 0$. D'après la question précédente, une primitive de $h(x)$ est $-f(x)$. D'où :

$$\int_0^A h(x) dx = [-f(x)]_0^A = -f(A) + f(0) = 1 - f(A) \text{ car } f(0) = 1.$$

D'après la question précédente, une primitive de $f(x)$ est $g(x)$. D'où :

$$\int_0^A f(x) dx = [g(x)]_0^A = g(A) - g(0) = g(A) + 2\ln(2) \text{ car } g(0) = -2\ln(2).$$

3. Soit $A \geq 0$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto h(x)$ sont continues et dérivables sur $[0, A]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = h(x)$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -f(x).$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$\int_0^A x \cdot h(x) dx = [-x f(x)]_0^A - \int_0^A 1 \times (-f(x)) dx = -A f(A) + 0 + \int_0^A f(x) dx.$$

$$\int_0^A x \cdot h(x) dx = -A f(A) + [g(x)]_0^A = -A f(A) + g(A) - g(0).$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = \frac{2e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2}$. h n'est donc pas continue en 0.

5. Montrons que h est une densité de probabilité :

- Étude de la continuité de h :
 - D'après la question précédente, h n'est pas continue en 0.
 - Si $x < 0$, $h(x) = 0$ donc h est continue sur $]-\infty, 0[$.
 - h est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

Finalement, h est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- Étude de la positivité de h :
 - Pour $x < 0$, $h(x) = 0 \geq 0$.
 - Pour $x \geq 0$, $h(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ car $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$.

h est donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

- Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$.

$$\text{D'après la relation de Chasles, } \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = \int_{-\infty}^0 h(t) dt + \int_0^{+\infty} h(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_{-\infty}^0 h(t) dt = 0 \text{ car } h(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{Sous réserve de convergence, } \int_0^{+\infty} h(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A h(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_0^A h(t) dt = 1 - f(A) \text{ d'après la question 2.}$$

$$\text{Par suite, } \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - f(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{1+e^A} = 1 \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^A = +\infty.$$

$$\text{On a donc } \int_0^{+\infty} h(t) dt = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0 + 1 = 1.$$

h est donc bien une densité de probabilité.

6. Déterminons la fonction de répartition H de Z . On a : $H(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt$.

• Si $x < 0$, $H(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

• Si $x \geq 0$:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt = \int_{-\infty}^0 h(t) dt + \int_0^x h(t) dt, \text{ d'après la relation de Chasles,}$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x h(x) dt = [-f(x)]_0^x = 1 - f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x} = \frac{1+e^x-2}{1+e^x} = \frac{e^x-1}{e^x+1}.$$

$$7. P(Z \geq \ln(2)) = 1 - H(\ln(2)) = 1 - \frac{e^{\ln(2)} - 1}{e^{\ln(2)} + 1} = 1 - \frac{2-1}{2+1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8)) = H(\ln(8)) - H(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(8)} - 1}{e^{\ln(8)} + 1} - \frac{e^{\ln(2)} - 1}{e^{\ln(2)} + 1} = \frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

$$P_{(Z \geq \ln(2))}(Z \leq \ln(8)) = \frac{P((Z \leq \ln(8)) \cap (Z \geq \ln(2)))}{P(Z \geq \ln(2))}.$$

Or, $(Z \leq \ln(8)) \cap (Z \geq \ln(2)) = (\ln(2) \leq Z \leq \ln(8))$. Donc :

$$P_{(Z \geq \ln(2))}(Z \leq \ln(8)) = \frac{P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8))}{P(Z \geq \ln(2))} = \frac{4/9}{2/3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}.$$

8. Nécessairement $x \geq 0$ car pour $x < 0$, $H(x) = 0$. Dès lors :

$$H(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(e^x - 1) = 1(e^x + 1) \Leftrightarrow 2e^x - 2 = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3).$$

9. Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt$.

$$\text{D'après la relation de Chasles, } \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt = \int_{-\infty}^0 t h(t) dt + \int_0^{+\infty} t h(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_{-\infty}^0 t h(t) dt = 0 \text{ car } h(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{Sous réserve de convergence, } \int_0^{+\infty} t h(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t h(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_0^A t \cdot h(t) dt = -A f(A) + g(A) - g(0) \text{ d'après la question 3.}$$

$$\text{Par suite, } \lim_{A \rightarrow +\infty} A f(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2A}{1+e^A} = 0 \text{ par croissances comparées et}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} g(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} -2 \ln(1+e^{-A}) = 0 \text{ par composées de limites.}$$

$$\text{Finalement, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t \cdot h(t) dt = -g(0) = 2 \ln(2).$$

$$\text{On a donc } \int_0^{+\infty} t h(t) dt = 2 \ln(2) \text{ puis } \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt = 0 + 2 \ln(2) = 2 \ln(2).$$

Z admet donc une espérance et $E(Z) = 2 \ln(2)$.

Exercice 127

1. Montrons que f est une densité de probabilité :

- f est de façon évidente continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et en 2.
- f est évidemment positive.
- Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt + \int_2^{+\infty} f(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_2^{+\infty} f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x > 2$.

De plus, $\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 0,5 dt = [0,5t]_0^2 = 1$.

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

f est donc bien une densité de probabilité.

$$2. X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,2], \text{ donc : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}, E(X) = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ et } V(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$3. P(0,4 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0,4) = \frac{1}{2} - \frac{0,4}{2} = 0,3.$$

Exercice 128

1. Montrons que f est une densité de probabilité :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lambda e^{-0} = \lambda$. f n'est donc pas continue en 0.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- Étude de la positivité de f :
 - Pour $x < 0$, $f(x) = 0 \geq 0$.
 - Pour $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \geq 0$ car $\lambda > 0$.

f est donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

- Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$ car $f(x) = 0$ si $x < 0$.

Sous réserve de convergence, $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t) dt$.

$$\int_0^A f(t) dt = \int_0^A \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[e^{-\lambda t} \right]_0^A = 1 - e^{-\lambda A}. \text{ Par suite, } \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - \lambda e^{-A} = 1.$$

On a donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + 1 = 1$.

f est donc une densité de probabilité.

2. On reconnaît une densité usuelle : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On a donc :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(démonstrations intéressantes à faire).

Exercice 129

Soit $X \sim N(20, 5)$. On pose $Z = \frac{X - 20}{5}$, $Z \sim N(0, 1)$.

$$P(X \leq 28) = P\left(\frac{X - 20}{5} \leq \frac{28 - 20}{5}\right) = P(Z \leq 1,6) = \Phi(1,6) = 0,9452.$$

$$P(X \geq 12) = P\left(\frac{X - 20}{5} \geq \frac{12 - 20}{5}\right) = P(Z \geq -1,6) = P(Z \leq 1,6) = \Phi(1,6) = 0,9452,$$

$$P(12 \leq X \leq 28) = P\left(\frac{12 - 20}{5} \leq \frac{X - 20}{5} \leq \frac{28 - 20}{5}\right) = P(-1,6 \leq Z \leq 1,6) = \Phi(1,6) - \Phi(-1,6).$$

$$P(12 \leq X \leq 28) = 2\Phi(1,6) - 1 = 0,8904$$

Exercice 130

1. a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$. Une densité de U est donc : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) Par cours : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

c) $P(U > x) = 1 - F(x)$. On a donc : $P(U > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

2. a) Le temps d'attente du skieur C est supérieur à x si les temps de passage des skieurs A et B aux guichets sont tous deux supérieurs à x : $(V > x) = (U_1 > x) \cap (U_2 > x)$.

b) U_1 et U_2 sont indépendantes, donc :

$$P(V > x) = P((U_1 > x) \cap (U_2 > x)) = P(U_1 > x) \times P(U_2 > x) = (P(U > x))^2.$$

c) $G(x) = P(V \leq x) = 1 - P(V > x) = 1 - (P(U > x))^2$. On en déduit :

$$\begin{cases} G(x) = 1 - 1^2 = 0 & \text{si } x < 0, \\ G(x) = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ G(x) = 1 - 0^2 = 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

d) La densité de probabilité g de la variable V est la dérivée de G . D'où :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x < 0, \\ g(x) = 2 - 2x & \text{si } x \in [0, 1], \\ g(x) = 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

e) • Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_{-\infty}^0 t g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt + \int_1^{+\infty} t g(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 t g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_1^{+\infty} t g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x > 1$.

$$\int_0^1 t g(t) dt = \int_0^1 t(2 - 2t) dt = \int_0^1 (2t - 2t^2) dt = \left[t^2 - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

V admet donc une espérance et $E(V) = \frac{1}{3}$.

• Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt$.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 g(t) dt + \int_0^1 t^2 g(t) dt + \int_1^{+\infty} t^2 g(t) dt.$$

Or, $\int_{-\infty}^0 t^2 g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_1^{+\infty} t^2 g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x > 1$

$$\int_0^1 t^2 g(t) dt = \int_0^1 t^2 (2 - 2t) dt = \int_0^1 (2t^2 - 2t^3) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt = 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$.

V admet donc une variance et :

$$\text{Var}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt - (E(V))^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Exercice 131

Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité.

Si X est positive et admet une espérance, alors :

$$\forall a > 0, P([X \geq a]) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Exercice 132

Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité. Si X admet une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P([|X - E(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exercice 133

1. Calculons le biais de chaque estimateur (ici, $\theta = p$) :

$$E_p(S_n) = E(S_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = \frac{1}{n} \times np = p.$$

$$E(T_n) = E\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iX_i\right) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iE(X_i) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n ip = \frac{2}{n(n+1)} p \sum_{i=1}^n i = p.$$

S_n et T_n sont donc des estimateurs sans biais.

Évidemment, $E(U_n) = 0$. Donc U_n est biaisé.

2. Ici, $X_i = 1$ si l'as est obtenu, 0 sinon. $p_0 = 0,15$ avec l'estimateur S_n ou $p'_0 = 1/7$ avec l'estimateur T_n .

Exercice 134

1. Par linéarité de l'espérance, $E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$.

$\overline{X_n}$ est donc un estimateur sans biais de $\frac{\theta}{2}$.

$T_n = 2\overline{X_n}$ est donc un estimateur sans biais de θ .

2. a) Les X_i ont pour fonction de répartition commune :

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/\theta & \text{si } 0 \leq x < \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

Déterminons la fonction de répartition de M_n .

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \quad F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

$$F_{M_n}(x) = P([X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) = P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x)$$

$$F_{M_n}(x) = (F_X(x))^n \text{ par indépendance des } X_i.$$

Ainsi, M_n admet pour fonction de répartition :

$$F_{M_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (x/\theta)^n & \text{si } 0 \leq x < \theta, \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ de densité :} \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

$$\text{On a finalement : } f_{M_n} = F'_{M_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} n/\theta^n \times x^{n-1} & \text{si } 0 \leq x < \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{b) } E(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{M_n}(t) dt = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} t^n dt = \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta. \quad U_n = \frac{n+1}{n} M_n \text{ convient.}$$

Exercice 135

1. On calcule d'abord les biais. $E(T_n) = E(X_1) = p$ et on a vu que $E(S_n) = p$.

T_n et S_n sont sans biais.

Dès lors, $r(T_n) = V(T_n) = pq$ et

$$r(S_n) = V(S_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n pq = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

Notons au passage le résultat important : $V(S_n) = \frac{pq}{n}$.

2. Le risque quadratique de S_n est n fois plus petit que celui de T_n et de plus, plus n est grand, plus $r(S_n)$ sera petit.

Exercice 136

1. Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = E(2\bar{X}_n) = 2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a}{2} = a$.

T_n est un estimateur sans biais de a . Son risque quadratique est égal à sa variance.

Or les X_i sont indépendantes donc :

$$r(T_n) = V(T_n) = V\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3n}.$$

2. • La fonction de répartition commune des X_i est : $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/a & \text{si } 0 \leq x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$.

- Déterminons la fonction de répartition de T'_n .

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_{T'_n}(x) = P(T'_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$

$$F_{T'_n}(x) = P([X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) = P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x)$$

$$F_{T'_n}(x) = (F(x))^n \text{ par indépendance des } X_i.$$

Ainsi, T'_n admet pour fonction de répartition :

$$F_{T'_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (x/a)^n & \text{si } 0 \leq x < a, \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ de densité :} \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$f_{T'_n} = F'_{T'_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} n/a^n \times x^{n-1} & \text{si } 0 \leq x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- $E(T'_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_0^a \frac{n}{a^n} t^n dt = \frac{n}{a^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{na}{n+1}.$

• Donc $b(T'_n) = \frac{na}{n+1} - a = \frac{-a}{n+1}$.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{T'_n}(t) dt = \int_0^a \frac{n}{a^n} t^{n+1} dt = \frac{n}{a^n} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^a = \frac{na^2}{n+2}$, puis :

$$V(T'_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{T'_n}(t) dt - (E(T'_n))^2 = \frac{na^2}{n+2} - \frac{n^2 a^2}{(n+1)^2} = \frac{na^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$$\text{Enfin, } r(T'_n) = V(T'_n) + (b(T'_n))^2 = \frac{na^2}{(n+1)(n+2)^2} + \frac{a^2}{(n+1)^2} = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}.$$

3. $E(T''_n) = \frac{n+1}{n} E(T'_n) = a$. T''_n est un estimateur sans biais de a .

$$r(T''_n) = V(T''_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2} V(T'_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{na^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{a^2}{n(n+2)}.$$

4. T_n et T''_n sont meilleurs que T'_n car ce sont des estimateurs sans biais.

De plus, $r(T_n) = \frac{a^2}{3n}$ et $r(T''_n) \approx \frac{a^2}{n^2}$ pour n grand. Le meilleur estimateur est T''_n .

Exercice 137

1. D'après le cours, un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha = 0,95$ est :

$$\begin{aligned} \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}} ; \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}} \right] &= \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{4 \times 1000 \times 0,05}} ; \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{4 \times 1000 \times 0,05}} \right] \\ &= \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{200}} ; \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{200}} \right] \\ &= [0,52 - 0,07 ; 0,52 + 0,07] = [0,45 ; 0,59] \end{aligned}$$

On s'attend donc à ce que "Mme Durand ait entre 45% et 59% des voix" ce qui ne permet pas de savoir si elle serait ou non élue !

Pour pouvoir conclure, il faudrait, comme l'estimation ponctuelle (la fréquence observée) est de 52%, un intervalle de confiance de largeur inférieure à 4%.

2. On souhaite déterminer n pour que $\frac{1}{\sqrt{4n \times 0,05}} \leq 0,02 \Leftrightarrow 0,2n \geq \frac{1}{0,02^2} \Leftrightarrow n \geq 12\,500$.

Il faut donc interroger au moins 12 500 électeurs pour obtenir un intervalle de confiance de longueur inférieure à 0,04.

Exercice 138

Série A : On ordonne la série de mesure 8 – 8 – 10 – 11 – 14 – 14 – 14 – 15 – 18

La médiane est la valeur centrale : 14.

• $9/4 = 2,25$ donc Q_1 est la troisième valeur : 10

• $3 \times 9/4 = 6,75$ donc Q_3 est la septième valeur : 14

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 14 - 10 = 4$.

Série B : On ordonne la série de mesure 6 – 7 – 10 – 11 – 11 – 11 – 13 – 15 – 15 – 18

La médiane est la moyenne des deux valeurs centrales : 11.

• $10/4 = 2,5$ donc Q_1 est la troisième valeur : 10

• $3 \times 10/4 = 7,5$ donc Q_3 est la huitième valeur : 15

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 15 - 10 = 5$.

Exercice 139

1. B. 2. A. 3. B. 4. C. 5. C. 6. B.

Exercice 140

1. Déterminons une équation de la droite passant par $(1; 3,8)$ et $(5; 16,2)$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{16,2 - 3,8}{5 - 1} = \frac{12,4}{4} = 3,1. \quad b = y_A - a x_A = 3,8 - 3,1 \times 1 = 0,7.$$

Finalement : $y = 3,1x + 0,7$

2. $(\bar{x}; \bar{y}) = (3; 10,06)$.

Exercice 141

On a : $\sum x_i = 10 \Rightarrow \bar{x} = \frac{10}{5} = 2$, $\sum y_i = 10 \Rightarrow \bar{y} = \frac{10}{5} = 2$.

$$\sum x_i^2 = 30 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{30}{5} - 2^2 = 2, \quad \sum y_i^2 = 30 \Rightarrow V(y) = 2.$$

$$\sum x_i y_i = 29 \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{29}{5} - 2 \times 2 = 1,8.$$

$$\text{Finalement, } \rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1,8}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 0,9.$$

La droite de régression de y en x a pour équation $y = a x + b$ où : $a = \frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x)^2} = \frac{1,8}{2} = 0,9$ et

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 2 - 0,9 \times 2 = 0,2 : y = 0,9x + 0,2.$$

La droite de régression de x en y : $x = a' y + b'$ où : $a' = \frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_y)^2} = 0,9$ et $b' = \bar{x} - a' \bar{y} = 0,2 :$

$$x = 0,9y + 0,2 \Leftrightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{2}{9}.$$