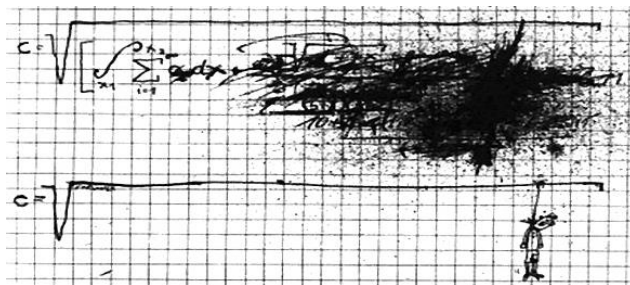


E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Exercices progressifs : limites et branches infinies

Julien Fernandez

Niveau 1 : Profane



⇒ Exercice corrigé 1

Limite d'une somme

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $f(x) = -3x + \frac{2}{x}$ 2. $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$ 3. $f(x) = \frac{-2}{x^2} + 8$ 4. $f(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction :



Technique : « point, point, accolade, par somme » en connaissant les limites de base

$$1. \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

$$3. \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^2} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 8 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8 \end{array}$$

$$4. \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \end{array}$$

Niveau 2 : Novice

⇒ Exercice corrigé 2 *Limite d'une différence*

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$ 2. $f(x) = \frac{4}{x} - 2x^2$ 3. $f(x) = -x - \frac{3}{\sqrt{x}}$

Correction :



Technique : « point, point (avec le ‘-‘ en bas), accolade, par somme »

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} 1. & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par somme de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{aligned} \\
 & \left. \begin{aligned} 2. & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par somme de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{aligned} \\
 & \left. \begin{aligned} 3. & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{\sqrt{x}} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par somme de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{aligned}
 \end{aligned}$$

⇒ Exercice corrigé 3 *Limite d'un produit*

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $f(x) = x \left(4 + \frac{2}{x} \right)$ 2. $f(x) = x^2 (3 - \sqrt{x})$ 3. $f(x) = (2x+1)(3-x)$

Correction :



Technique : « point, point, accolade, par produit »

$$\left. \begin{aligned} 1. & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{2}{x} = 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par produit de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \sqrt{x} = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

$$3. \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

⇒ Exercice corrigé 4

Limite de polynômes en $\pm\infty$ (technique du monôme de plus haut degré)

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = -3x^2 + 5x + 2 \qquad 2. f(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 5$$

Correction :



Technique : règle du monôme de plus haut degré car on est en l'infini

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

Niveau 3 : Initié

⇒ Exercice corrigé 5

Limite de fonctions rationnelles en $\pm\infty$ (monôme de plus haut degré) Asymptotes horizontales

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes et interpréter lorsque cela est possible en termes d'asymptotes :

$$1. f(x) = \frac{-x^5 + x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x + 1}$$

$$2. f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{2x^4 + x - 2}$$

$$3. f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 1}$$



Correction :

Technique : règle du monôme de plus haut degré car on est en l'infini

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty \text{ (4 étapes)}$$

(détail du calcul intermédiaire à ne pas écrire : $\frac{-x^5}{x^2} = \frac{-x \times x \times x \times \cancel{x} \times \cancel{x}}{\cancel{x} \times \cancel{x}} = -x \times x \times x = -x^3$).

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \text{ (3 étapes possibles)}$$

(détail du calcul intermédiaire à ne pas écrire : $\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1 \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}}{2 \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}} = \frac{1}{2}$).

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.



Rappel : Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ (4 étapes)}$$

(détail du calcul intermédiaire à ne pas écrire : $\frac{3x}{x^2} = \frac{3 \times \cancel{x}}{x \times \cancel{x}} = \frac{3}{x}$).

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

⇒ Exercice corrigé 6

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Correction :

$$\blacksquare f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x} - (2x + 1) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.



Rappel : Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

⇒ Exercice corrigé 7

Asymptote oblique

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ aux courbes représentatives.

$$1. \quad f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} \qquad 2. \quad f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x+1} \qquad 3. \quad f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x+1}$$

Correction :

Technique : 2 petits points, étape 1 « calcul de la différence » puis étape 2 « limite du résultat »

$$1. \bullet \quad f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 + \frac{1}{x} - 2x - 1 = \frac{1}{x}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La droite d'équation $y = 2x + 1$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de f .

$$2. \bullet \quad f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 - \frac{1}{x+1} - 2x - 1 = -\frac{1}{x+1}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$$

La droite d'équation $y = 2x + 1$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de f .

3. (plus difficile car il y a plus de calcul)

$$\bullet \quad f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 + 3x}{x+1} - (2x + 1) = \frac{2x^2 + 3x - (2x + 1)(x+1)}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 + 3x - (2x^2 + 2x + x + 1)}{x+1} = \frac{2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - x - 1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - (2x + 1) = \frac{-1}{x+1}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$$

La droite d'équation $y = 2x + 1$ est bien asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de f .

⇒ Exercice corrigé 8

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.

Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$

Correction :

- $f(x) - (x-2) = \frac{x^2+1}{x+2} - (x-2) = \frac{x^2+1-(x-2)(x+2)}{x+2} = \frac{x^2+1-x^2+4}{x+2} = \frac{5}{x+2}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0.$

On en déduit que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Remarque : c'est aussi le cas en $-\infty$.

Niveau 4 : Professionnel**⇒ Exercice corrigé 9**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x}.$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

**Correction :**

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f .



Rappel : Si $\lim_{x \rightarrow a^- \text{ ou } a^+} f(x) = \pm\infty$, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

⇒ Exercice corrigé 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1-2x}{x-1}.$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

Correction :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

2. On a besoin du signe de $x-1$. $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} 1-2x = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array}.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

On en déduit que la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe de f .

⇒ Exercice corrigé 11

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)^3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 3x)^2$$

Correction :

Technique : « point, point, accolade, par composée »

$$1. \bullet \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 5 = 4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Par composée de limites,} \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$2. \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Par composée de limites,} \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 2} X^3 = 8 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$$

$$3. \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 3x = 16 \left\{ \begin{array}{l} \text{Par composée de limites,} \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 16} X^2 = 256 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 256$$

⇒ Exercice corrigé 12

Limite de fonctions rationnelles en $\pm\infty$ (monôme de plus haut degré)**Limite de fonctions rationnelles en une valeur interdite (limite d'un quotient)****Asymptotes horizontales et verticales**

Pour chacune des fonctions suivantes :

- a) Déterminer l'ensemble de définition.
 b) Déterminer leurs limites aux bornes de leur ensemble de définition.
 Interpréter graphiquement lorsque cela est possible.

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x+4}$ 2. $f(x) = \frac{2x-5}{-x+2}$ 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$ 4. $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

Correction :


Remarque : ces fonctions sont des fonctions rationnelles ; elles sont définies lorsque leur dénominateur est différent de 0.

Technique 1 : à l'infini, règle du monôme de plus haut degré


Technique 2 : en une valeur interdite, signe du dénominateur puis « point, point, accolade, par quotient » sachant que « $1 / 0^\pm = \pm\infty$ » (interdit de l'écrire)

1. a) $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$. f est définie sur $] -\infty ; -4[\cup] -4 ; +\infty [$.

b) Il y a 4 limites à déterminer ($-\infty$, -4^- , -4^+ et $+\infty$). On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

Il reste les 2 limites en la valeur interdite.

➤ **Signe du dénominateur :** $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$

Dès lors :

③ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^-} 2x+1 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -4^-} x+4 = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty \end{array} \quad \text{puis}$

④ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^+} 2x+1 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} x+4 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty \end{array}$

La droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à la courbe de f .

2. a) $-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$. f est définie sur $] -\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

b) Il y a 4 limites à déterminer ($-\infty$, 2^- , 2^+ et $+\infty$). On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

Il reste les 2 limites en la valeur interdite.

➤ **Signe du dénominateur** : $-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$+$	0	$-$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 5 = -1 \\ & \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = 0^+ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \end{array} \quad \text{puis} \\ \textcircled{4} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 5 = -1 \\ & \lim_{x \rightarrow 2^+} -x + 2 = 0^- \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de f .

3. a) Pour déterminer les valeurs interdites, on calcule le discriminant car $x^2 + 3x + 2$ est un trinôme du second degré.

$$a=1, b=3, c=2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Il y a deux racines (donc deux valeurs interdites) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Finalement, f est définie sur $] -\infty ; -2[\cup]-2 ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.

b) Il y a 6 limites à déterminer ($-\infty$, -2^- , -2^+ , -1^- , -1^+ et $+\infty$).

On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

Il reste les 4 limites en la valeur interdite.

➤ **Signe du dénominateur** : il est du signe de 1 à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
x^2+3x+2	+	0	-	0	+

Dès lors :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 1 = 5 \\ & \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 3x + 2 = 0^+ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \end{array} \quad \text{puis} \\ \textcircled{4} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 1 = 5 \\ & \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^- \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f .

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 1 = 2 \\ & \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 3x + 2 = 0^- \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \end{array} \quad \text{puis} \\ \textcircled{6} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 1 = 2 \\ & \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 3x + 2 = 0^+ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe de f .

4. a) Le déterminant est un trinôme du second degré, mais on reconnaît l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc 1 et -1 sont les racines évidentes (il n'y en a pas d'autre).

Finalement, f est définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

- b) Il y a 6 limites à déterminer ($-\infty$, -1^- , -1^+ , 1^- , 1^+ et $+\infty$).

On commence par $+\infty$ et $-\infty$.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

Il reste les 4 limites en la valeur interdite.

➤ **Signe du dénominateur** : il est du signe de 1 à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
x^2-1	+	0	-	0	+

Dès lors :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2x + 3 = 6 \\ & \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0^+ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par quotient de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \end{aligned} \quad \text{puis} \\ \textcircled{4} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2x + 3 = 6 \\ & \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 1 = 0^- \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par quotient de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{aligned} \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe de f .

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x + 3 = 2 \\ & \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 0^- \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par quotient de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \end{aligned} \quad \text{puis} \\ \textcircled{6} \quad & \left. \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x + 3 = 2 \\ & \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 0^+ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Par quotient de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{aligned} \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f .

Niveau 5 : Expert

⇒ Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -3x + 2 + \frac{\ln x}{x}$.

Montrer que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

Correction :

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-3x + 2)] = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = -3x + 2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.



Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ alors $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f .



⇒ Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + xe^x$.

Montrer que la courbe représentative de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

Correction :

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

⇒ Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Montrer que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

Correction :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{x(x+1) + 1}{x + 1} = \frac{x(x+1)}{x + 1} + \frac{1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x)] = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Cette méthode est astucieuse. Une autre méthode, plus conventionnelle, sera vue dans l'exercice 16 question 4

Niveau 6 : Master

⇒ Exercice 16

Étude des branches infinies

Étudier les branches infinies de :

1. la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$.
2. la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$.
3. la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$.
4. la fonction f définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 2}$.



Correction :



Méthodologie en absence de guidage de l'énoncé : on étudie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on étudie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$:

1^{er} cas : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique verticale (Oy).

2^e cas : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique horizontale (Ox).

3^e cas : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, on étudie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$

① **si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique**

② **si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = ax$.**

1. On étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. On étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées (limite du cours).}$$

La courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique horizontale.

2. On étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. On étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissances comparées (limite du cours).}$$

La courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique verticale.

3. ➤ On étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

➤ On étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + \ln x}{x} = \frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x} = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.

➤ On étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.

$$f(x) - x = x + \ln x - x = \ln x.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

En définitive, la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = x$.

4. ➤ On étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty.$$

➤ On étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \times f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 2} = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$.

➤ On étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$.

$$f(x) - 3x = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 2} - 3x = \frac{3x^2 - 5x + 1 - 3x(x + 2)}{x + 2} = \frac{3x^2 - 5x + 1 - 3x^2 - 6x}{x + 2} = \frac{-11x + 1}{x + 2}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-11x}{x} = -11$.

En définitive, la droite d'équation $y = 3x - 11$ est asymptote oblique à la courbe de f .