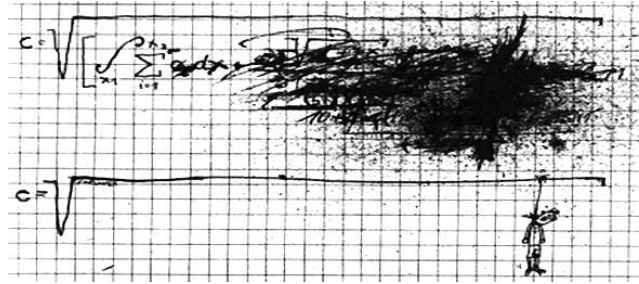


E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Exercices progressifs : matrices inverses

Julien Fernandez



Niveau 1 : Profane

⇒ Exercice corrigé 1

Dans ce niveau, on s'intéresse, si elle existe, à l'inverse d'une matrice 2×2 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est-elle inversible ? Si oui, donner sa matrice inverse A^{-1} .

Correction :

Cours :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$1 \times 2 - 1 \times 4 = 2 - 4 = -2 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

⇒ Je m'entraîne

- ① Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- ② Même exercice avec $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- ③ Même exercice avec $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- ④ Même exercice avec $E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

Niveau 2 : Novice



⇒ Exercice corrigé 2

On considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer Q^2 .
2. En déduire que Q est inversible et donner Q^{-1} .

Correction :



Cours :

Soient deux matrices A et B telles que $A \times B = I$. Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

$$1. \quad Q^2 = Q \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad Q \times Q = I. \text{ Donc } Q \text{ est inversible et } Q^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

⇒ Je m'entraîne

$$① \quad \text{On considère les matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A \times B$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

$$② \quad \text{On considère les matrices } P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner P^{-1} .

③ On considère les matrices $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Calculer $R \times S$. En déduire que R est inversible et donner R^{-1} .

Niveau 3 : Initié

⇒ Exercice corrigé 3

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $P \times Q$. Conclure.



Correction :



Cours :

Soient deux matrices A et B telles que $A \times B = k \times I$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{k} B$.

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I. \text{ Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{6} Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$



L'écriture $P^{-1} = \frac{1}{6} Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ suffit et est même conseillée !

⇒ Je m'entraîne

① On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Niveau 4 : Professionnel

⇒ Exercice corrigé 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A - 2I$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .



Correction :

1. $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Par suite, $A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.

2. $A^2 - A - 2I = O$

$$\Leftrightarrow A^2 - A = 2I$$

$$\Leftrightarrow A(A - I) = 2I$$

😊👍 On reconnaît la propriété du niveau précédent : $A \times B = 2I$ avec $B = (A - I)$.

$$A \text{ est donc inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

⇒ Je m'entraîne

① On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 - A + 2I$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

Niveau 5 : Expert

⇒ Exercice corrigé 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.



Correction :

1. A est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nul.
Donc A est inversible.

2.
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -0,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 / 2 \\ L_2 \leftarrow L_2 / 2 \end{matrix} \quad \text{Finalement, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -2 \\ 0 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

⇒ Je m'entraîne

① On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

② On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

③ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Justifier que A est inversible et calculer A^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.

⇒ Exercice corrigé 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A-I)(A-2I)(A+I)$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

Correction :

1. On trouve : $(A-I)(A-2I)(A+I) = O$. (Il faut donner au moins un résultat intermédiaire, soit $(A-I)(A-2I)$ soit $(A-2I)(A+I)$)

2. On développe : $(A-I)(A-2I)(A+I) = (A^2 - 2A - A + 2I)(A+I)$.

$$\Leftrightarrow (A-I)(A-2I)(A+I) = A^3 - 2A^2 - A^2 + 2A + A^2 - 2A - A + 2I$$

$$\Leftrightarrow (A-I)(A-2I)(A+I) = A^3 - 2A^2 - A + 2I$$

Dès lors : $(A-I)(A-2I)(A+I) = O \Leftrightarrow A^3 - 2A^2 - A + 2I = O$

$$\Leftrightarrow A^3 - 2A^2 - A = -2I \Leftrightarrow A(A^2 - 2A - I) = -2I.$$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I)$ (à calculer).

⇒ Exercice corrigé 7

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Conclure.

Correction :

$$C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que C soit inversible. On aurait alors :

$$C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C^{-1} \times C \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ce qui est absurde.}$$

(On a multiplié par C^{-1} à gauche).

On en conclut que C n'est pas inversible.



On vient de réaliser une démonstration par l'absurde.

⇒ Je m'entraîne

① On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Conclure.

② On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Conclure.

Niveau 6 : Master**⇒ Exercice corrigé 8**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Montrer que, si A est inversible, alors $A^2 - 3A + 2I = O_3$.
3. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. Conclure.

**Correction :**

1. (Il faut calculer A^2 puis A^3). On trouve : $A^3 - 3A^2 + 2A = O$.
2. Si A est inversible, A^{-1} existe.

On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par A^{-1} .

$$A^3 - 3A^2 + 2A = O \Leftrightarrow A^{-1}(A^3 - 3A^2 + 2A) = A^{-1} \times O \Leftrightarrow A^2 - 3A + 2I = O.$$

Si A est inversible, alors $A^2 - 3A + 2I = O$ (c'est une proposition conditionnelle).

3. Il faut calculer $A^2 - 3A + 2I$. $A^2 - 3A + 2I \neq O$ donc A n'est pas inversible.
(On a utilisé la contraposée de la proposition conditionnelle)

⇒ Exercice corrigé 9

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Correction :

Occupons-nous de la matrice A. On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Les pivots de la réduite de Gauss sont non nuls, donc A est inversible.

$$\begin{aligned} \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ \\ \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 / 3 \\ L_2 \leftarrow L_2 / (-3) \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Occupons-nous maintenant de la matrice B . On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
 \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_1 - L_3 \end{array} \\
 \sim & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

La matrice de gauche est triangulaire supérieure et possède un élément diagonal nul, donc B n'est pas inversible.

⇒ Je m'entraîne

① Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$