

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

**Exercices types :
couple de variables
aléatoires**

Julien Fernandez

Couples de variables aléatoires réelles.

I. Calculer à partir d'une loi de couple donnée

⇒ Exercice corrigé 1

On considère la loi conjointe donnée ci-dessous.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,3

1. Reconnaître la loi de X .
2. Justifier rigoureusement que $P([Y = 2]) = 0,5$.
3. Calculer $P_{[Y=2]}([X = 0])$.
4. Calculer la covariance du couple (X, Y) .
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction :



1. La loi de X est obtenue à l'aide des valeurs de X et de la marginale correspondante (la somme des probabilités).

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi de X
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6

On reconnaît une loi usuelle : X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,6.

2. $[X = 0]$ et $[X = 1]$ constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P([Y = 2]) = P([Y = 2] \cap [X = 0]) + P([Y = 2] \cap [X = 1]) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

3. $P_{[Y=2]}([X = 0]) = \frac{P([Y = 2] \cap [X = 0])}{P([Y = 2])} = \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5} = 0,4.$



4. Pour calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires :

① On calcule $E(XY) = \sum_i \sum_j p_{i,j} x_i y_j$.

(On notera les analogies avec les formules de $E(X) = \sum_i p_i x_i$ et de $E(X^2) = \sum_i p_i x_i^2$).

② $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)$.

(On notera l'analogie avec la formule de Koenig-Huygens : $\text{Cov}(X, X) = V(X)$).



Pratiquement :

$E(XY)$ se calcule avec la loi de couple (les marginales ne sont pas nécessaires).

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,3

Il y a 6 cases : $E(XY)$ est la somme de six termes.

$$E(XY) = 0,1 \times 0 \times 0 + 0,1 \times 0 \times 1 + 0,2 \times 0 \times 2 + 0,1 \times 1 \times 0 + 0,2 \times 1 \times 1 + 0,3 \times 1 \times 2,$$

$$\Leftrightarrow E(XY) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0,2 + 0,6,$$

$$\Leftrightarrow E(XY) = 0,8.$$



Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(0,6)$, donc $E(X) = 0,6$.

On a maintenant besoin de la loi de Y pour calculer son espérance.

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi de X
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de Y	0,2	0,3	0,5	1

$$E(Y) = 0,2 \times 0 + 0,3 \times 1 + 0,5 \times 2 = 0 + 0,3 + 1 = 1,3.$$

$$\text{Enfin, } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = 0,8 - 0,6 \times 1,3 = 0,8 - 0,78 = 0,02.$$

5. $\text{Cov}(X, Y) = 0,02 \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Il s'agit de la contraposée de la proposition conditionnelle : X et Y ind $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$.

(Revoir si nécessaire chapitre 2 en ECP1).

⇒ Exercice corrigé 2

On considère la loi conjointe donnée ci-dessous.

$X \backslash Y$	0	1
0	1/3	1/6
1	1/6	1/3

1. Reconnaître les lois de X et de Y puis donner $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Donner $XY(\Omega)$ puis donner la loi de XY et la reconnaître. Calculer $E(XY)$.
3. Donner $(X+Y+1)(\Omega)$ puis donner la loi de $(X+Y+1)$ et la reconnaître. Calculer $E(X+Y+1)$.
4. Donner la loi de X sachant $[Y=0]$ et la reconnaître. Calculer $E(X \text{ sachant } [Y=0])$.

Correction :

1. On complète les marginales pour obtenir les lois de X et de Y .

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	1/3	1/6	1/2
1	1/6	1/3	1/2
Loi de Y	1/2	1/2	1

X et Y suivent toutes les deux la loi de Bernoulli de paramètre 0,5, $\mathcal{B}(0,5)$.

2. Si $X=0$ et $Y=0$ alors $XY=0$.
 Si $X=0$ et $Y=1$ alors $XY=0$.
 Si $X=1$ et $Y=0$ alors $XY=0$.
 Si $X=1$ et $Y=1$ alors $XY=1$.
 On en déduit $XY(\Omega) = \{0;1\}$. XY suit donc une loi de Bernoulli.

De plus, $P(XY=1) = P([X=1] \cap [Y=1]) = 1/3$. On en déduit que $XY \hookrightarrow \mathcal{B}(1/3)$.

$XY=k$	0	1
$P(XY=k)$	1/6	1/3

Puisque $XY \hookrightarrow \mathcal{B}(1/3)$, $E(XY) = 1/3$.



Remarque : on obtient bien sûr le même résultat que si on avait calculé $E(XY)$

directement à l'aide de la formule : $E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{i,j}$.

3. Si $X = 0$ et $Y = 0$ alors $X + Y + 1 = 1$.

Si $X = 0$ et $Y = 1$ alors $X + Y + 1 = 2$.

Si $X = 1$ et $Y = 0$ alors $X + Y + 1 = 2$.

Si $X = 1$ et $Y = 1$ alors $X + Y + 1 = 3$.

On en déduit $(X + Y + 1)(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$.

De plus, $P(X + Y + 1 = 1) = P([X = 0] \cap [Y = 0]) = 1/3$.

$P(X + Y + 1 = 3) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 1/3$.

Enfin, $P(X + Y + 1 = 2) = 1 - P(X + Y + 1 = 1) - P(X + Y + 1 = 3) = 1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$.

On en déduit que $X + Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1; 3 \rrbracket}$.

$X + Y + 1 = k$	1	2	3
$P(X + Y + 1 = k)$	1/3	1/3	1/3

Puisque $X + Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1; 3 \rrbracket}$, $E(X + Y + 1) = \frac{3+1}{2} = 2$.



Remarque : on obtient bien sûr le même résultat que si on avait calculé $E(X + Y + 1)$ par linéarité de l'espérance : $E(X + Y + 1) = E(X) + E(Y) + 1 = 0,5 + 0,5 + 1 = 2$.

4. X sachant $[Y = 0]$ ne prend que les valeurs 0 et 1, donc X sachant $[Y = 0]$ est une loi de Bernoulli.

De plus, $P_{[Y=0]}([X = 1]) = \frac{P([X = 0] \cap [Y = 1])}{P([Y = 0])} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc X sachant $[Y = 0]$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/3$ (la même que XY).

$[X = k]$ sachant $[Y = 0]$	0	1
$P_{[Y=0]}([X = k])$	2/3	1/3

On en déduit $E(X \text{ sachant } [Y = 0]) = 1/3$.

II. Construire le tableau d'une loi de couple

⇒ Exercice corrigé 3

On considère deux variables aléatoires X et Y de loi de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ respectivement. On suppose de plus que $P[X = 0 \cap Y = 0] = \frac{1}{6}$.

Déterminer la loi du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction :



Déterminations de lois conjointes :

Méthodologie :

- identifier les valeurs prises par $X, Y, \dots$
- Construire un tableau en n'oubliant pas les marginales lorsqu'elles sont données.

D'après l'énoncé, on connaît la loi de X : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$:

- donc $X(\Omega) = \llbracket 0; 1 \rrbracket$, c'est-à-dire qu'on prévoit une ligne/colonne pour $[X = 0]$ et une deuxième pour $[X = 1]$.
- on peut remplir la marginale associée à X car :

$$P([X = 1]) = p = \frac{1}{2} \text{ et } P([X = 0]) = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Toujours d'après l'énoncé, on connaît la loi de Y : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$:

- donc $Y(\Omega) = \llbracket 0; 1 \rrbracket$ et on prévoit une ligne/colonne pour $[Y = 0]$ et une pour $[Y = 1]$.
- on peut remplir la marginale associée à Y :

$$P([Y = 1]) = p = \frac{2}{3} \text{ et } P([Y = 0]) = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

À ce stade, on a :

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0			$\frac{1}{2}$
1			$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

On observe qu'avec une dernière information, on est en mesure de terminer le remplissage du tableau.

Cette information est donnée par : $P[X = 0 \cap Y = 0] = \frac{1}{6}$. On a donc :

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
1			$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Comme $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et comme $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, on a finalement :

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1



Pour savoir si deux variables X et Y sont indépendantes :

- ① Soit il existe une valeur a de X et une valeur b de Y pour lesquelles :

$$P([X = a] \cap [Y = b]) = P([X = a]) \times P([Y = b])$$

alors les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Astuce : si une case nulle du tableau est associée à deux probabilités non nulles, les variables ne peuvent pas être indépendantes.

- ② Soit pour toutes les valeurs a de X et toutes les valeurs b de Y on a :

$$P([X = a] \cap [Y = b]) = P([X = a]) \times P([Y = b])$$

alors les variables X et Y sont indépendantes.

- ③ Soit si on connaît $\text{Cov}(X, Y)$ et que $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Dans cet exercice :

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} \text{ et } P([X = 0]) \times P([Y = 0]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} \text{ et } P([X = 0]) \times P([Y = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} \text{ et } P([X = 1]) \times P([Y = 0]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} \text{ et } P([X = 1]) \times P([Y = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Les variables X et Y sont donc indépendantes.



⇒ Exercice corrigé 4

Une urne contient une boule blanche et deux boules rouges.

On effectue dans cette urne deux tirages successifs avec remise de la première boule tirée.

On note X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon et Y la variable aléatoire égale à 1 si deux boules blanches sont tirées et 0 sinon.

On considère enfin les deux variables aléatoires U et V définies par :

$$U = X + Y \text{ et } V = \min(X, Y).$$

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? (Justifier).
3. Déterminer l'espérance des variables aléatoires U et V puis celle de la variable aléatoire $U + V$.

Correction :



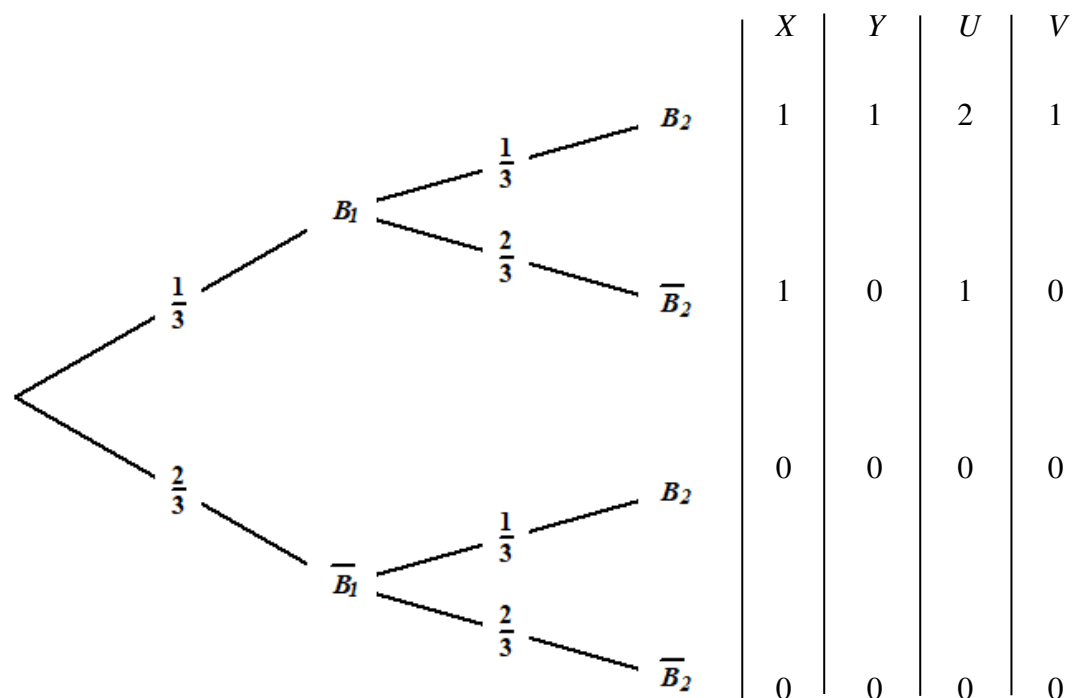
Déterminations de lois conjointes dans le cas de tirages successifs :

Méthodologie :

- construire un arbre en suite d'événements « B_i »
- le prolonger en $X, Y, U, V...$
- construire le tableau en identifiant bien les valeurs possibles pour chaque v.a.

On note B_i l'événement : « une boule blanche est tirée au i ème tirage ».

Les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre suivant :



1. D'après ce qui précède, $U(\Omega) = \llbracket 0; 2 \rrbracket$ et $V(\Omega) = \llbracket 0; 1 \rrbracket$.

On peut donc commencer la construction du tableau :

$V \backslash U$	0	1	2	Loi de V
0				
1				
Loi de U				1

Encore d'après ce qui précède, on observe que les événements $[U=0] \cap [V=1]$, $[U=1] \cap [V=1]$ et $[U=2] \cap [V=0]$ sont impossibles.

On renseigne le tableau :

$V \backslash U$	0	1	2	Loi de V
0			0	
1	0	0		
Loi de U				1

Toujours d'après l'arbre augmenté :

$$[U=2] \cap [V=1] = B_1 \cap B_2,$$

$$[U=1] \cap [V=0] = B_1 \cap \overline{B_2}, \text{ et}$$

$$[U=0] \cap [V=0] = (\overline{B_1} \cap B_2) \cap (\overline{B_1} \cap \overline{B_2}).$$

On en déduit :

$$P([U=2] \cap [V=1]) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$P([U=1] \cap [V=0]) = P(B_1 \cap \overline{B_2}) = P(B_1) \times P_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Deux façons pour calculer la dernière probabilité manquante : soit par utilisation du fait que la somme des probabilités est égale à 1, soit par calcul direct.

Utilisation du fait que la somme des probabilités est égale à 1 :

À ce stade de la réflexion, on peut compléter le tableau :

$V \backslash U$	0	1	2	Loi de V
0		$\frac{2}{9}$	0	
1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
Loi de U		$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

On en déduit aisément :

$$P([V = 0]) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

$$P([U = 0]) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$P([U = 0] \cap [V = 0]) = P([U = 0]) - P([U = 0] \cap [V = 1]) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

Ou bien, calcul direct :

$$P([U = 0] \cap [V = 0]) = P((\overline{B_1} \cap B_2) \cap (\overline{B_1} \cap \overline{B_2}))$$

$$\Leftrightarrow P([U = 0] \cap [V = 0]) = P(\overline{B_1} \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \text{ par incompatibilité,}$$

$$\Leftrightarrow P([U = 0] \cap [V = 0]) = P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}),$$

$$\Leftrightarrow P([U = 0] \cap [V = 0]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Finalement, on a

$V \backslash U$	0	1	2	Loi de V
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{8}{9}$
1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
Loi de U	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2. Analyse :

On peut utiliser l'astuce vue dans l'exercice 2 : il y a (au moins) un 0 dans le tableau associé à deux probabilités non nulles. U et V ne sont pas indépendantes.

Rédaction :

$$P([U = 0] \cap [V = 1]) = 0.$$

$$\text{Or, } P([U = 0]) \times P([V = 1]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{9} \neq 0.$$

Les variables U et V ne sont donc pas indépendantes.

3. D'après les lois de U et V :

$$E(U) = \frac{2}{3} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times 2 = 0 + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

$$E(V) = \frac{8}{9} \times 0 + \frac{1}{9} \times 1 = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Par linéarité de l'espérance, } E(U + V) = E(U) + E(V) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$