

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Exercices types : les suites récurrentes

Julien Fernandez

Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

I. Les suites géométriques

⇒ Exercice corrigé 1

- On considère la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de terme initial $u_0 = 2$.
Déterminer u_n puis calculer u_4 .
- La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de terme initial $v_1 = 64$. Calculer v_n .
- On considère la suite géométrique (w_n) de raison -2 et de terme initial $w_0 = -2$.
Déterminer w_n puis calculer w_5 .
- La suite (a_n) est définie par $a_0 = 4$ et $a_{n+1} = \frac{1}{8} a_n$.
Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Calculer a_n .
- La suite (b_n) est définie par : $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2} b_n \end{cases}$. Déterminer l'écriture explicite de b_n .

Correction :

Rappel :

(u_n) est la suite géométrique de premier terme u_0 ou u_1 et de raison a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 \text{ ou } u_1 \\ u_{n+1} = a u_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_0 \times a^n = u_1 \times a^{n-1}$$

- $u_n = u_0 \times a^n = 2 \times 3^n$. On en déduit : $u_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$.
- $v_n = v_1 \times a^{n-1} = 64 \times 0,5^{n-1}$.
- $w_n = w_0 \times a^n = -2 \times (-2)^n = (-2)^{n+1}$. On en déduit : $w_5 = (-2)^6 = 64$.
- (a_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{8}$ et de terme initial $a_0 = 4$.

$$a_n = a_0 \times \text{raison}^n = 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{4}{8^n}.$$



5. (b_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de terme initial $b_1 = 2$.

$$b_n = b_1 \times \text{raison}^{n-1} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{(-2)^n} = -\frac{-2}{(-2)^n} = -\frac{1}{(-2)^{n-1}}.$$

Les simplifications ne sont pas obligatoires !

II. Les suites arithmétiques

⇒ Exercice corrigé 2

Déterminer les formules explicites des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_0 = 2$ et $a = 5$.

2. $u_0 = 1$ et $a = -2$.

3. $u_1 = 1$ et $a = 3$.

Correction :

Rappel :

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 ou u_1 et de raison a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 \text{ ou } u_1 \\ u_{n+1} = u_n + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u_n = bn + u_0 = b(n-1) + u_1$$

1. $u_n = bn + u_0 = 5n + 2$.

2. $u_n = bn + u_0 = -2n + 1$.

3. $u_n = b(n-1) + u_1 = 3(n-1) + 1 = 3n - 3 + 1 = 3n - 2$.

⇒ Exercice corrigé 3

Pour chacune des suites ci-dessous :

- reconnaître la nature de la suite,
- déterminer u_n en fonction de n .

1. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_1 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Correction :

1. (u_n) est la suite arithmétique de raison -2 et de terme initial $u_0 = -3$.

$$u_n = bn + u_0 = -2n - 3.$$

2. (u_n) est la suite arithmétique de raison 3 et de terme initial $u_1 = 5$.

$$u_n = b(n-1) + u_1 = 3(n-1) + 5 = 3n - 3 + 5 = 3n + 2.$$

3. (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 et de terme initial $u_1 = -7$.

$$u_n = b(n-1) + u_1 = 5(n-1) - 7 = 5n - 5 - 7 = 5n - 12.$$

III. Les suites arithmético-géométriques**⇒ Exercice corrigé 4**

On considère la suite (p_n) définie par $p_1 = 0,75$ et, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,5$.

1. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
2. pour tout $n \geq 1$, calculer p_n .
3. Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Correction :**Rappel :**

(u_n) est une suite arithmético-géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des constantes réelles.



Pour déterminer le terme d'une suite arithmético-géométrique :

- On détermine son point fixe x qui vérifie : $x = ax + b$.
- On pose $v_n = u_n - x$. On montre que (v_n) est une suite géométrique.
- On détermine l'expression de v_n ($v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_1 \times q^{n-1}$) puis on en déduit l'expression de u_n ($u_n = v_n + x$)

1. (p_n) est une suite arithmético-géométrique.
2. ★ Recherche du point fixe : $x = 0,5x + 0,5 \Leftrightarrow x - 0,5x = 0,5 \Leftrightarrow 0,5x = 0,5 \Leftrightarrow x = 1$.
 ★ Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = p_n - x = p_n - 1$.
 Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - 1 = 0,5p_n + 0,5 - 1 = 0,5p_n - 0,5 = 0,5(p_n - 1) = 0,5v_n.$$
 (v_n) est donc la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme :

$$v_1 = p_1 - 1 = 0,75 - 1 = -0,25.$$
 On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -0,25 \times 0,5^{n-1}$.
 ★ Finalement, $p_n = v_n + x = 1 - 0,25 \times 0,5^{n-1}$.
3. $|0,5| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

⇒ Exercice corrigé 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 0,4u_n + 0,6$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. pour tout $n \geq 1$, calculer u_n .
3. Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction :

1. (p_n) est une suite arithmético-géométrique.
2. ★ Recherche du point fixe : $x = 0,4x + 0,6 \Leftrightarrow x - 0,4x = 0,6 \Leftrightarrow 0,6x = 0,6 \Leftrightarrow x = 1$.
 ★ Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = u_n - x = u_n - 1$.
 Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 0,4u_n + 0,6 - 1 = 0,4u_n - 0,4 = 0,4(u_n - 1) = 0,4v_n.$$
 (v_n) est donc la suite géométrique de raison 0,4 et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 1 = 0,1 - 1 = -0,9.$$
 On en déduit que, pour tout $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times q^n = -0,9 \times 0,4^n$.
 ★ Finalement, $u_n = v_n + x = 1 - 0,9 \times 0,4^n$.
3. $|0,4| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,4^n = 0$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

IV. Cas général : suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$



Méthodologie non exhaustive : l'étude de la suite est en général basée sur l'utilisation de théorème de convergence monotone puis recherche de point(s) fixe(s)

■ Théorème de convergence monotone :



Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Ce théorème est un théorème d'existence de limite. Il ne permet pas de savoir à quoi égale la limite.

① Il faut donc savoir montrer (en général par récurrence) qu'une suite est soit bornée ($a \leq u_n \leq b$), soit majorée ($u_n \leq b$), soit minorée ($a \leq u_n$).

② Il faut donc savoir déterminer les variations d'une suite :

1^{re} technique : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Remarque : une question intermédiaire peut parfois être posée pour aider.

2^e technique : si la suite est croissante, on démontre par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$

si la suite est décroissante, on démontre par récurrence que $u_n \geq u_{n+1}$

Remarque : pour cette méthode, il est utile (voire nécessaire) de montrer que la fonction f est croissante

■ Points fixes :

Soit une suite u définie par u_0 et, pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe si $f(x) = x$.

Théorème :

Si f est continue sur I et si u est convergente vers ℓ , alors : $\ell = f(\ell)$.

Autrement dit, un point fixe est candidat à être la limite de la suite récurrente.

⇒ Exercice corrigé 6

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Étudier le signe de l'expression $-\frac{1}{2}x + 4$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 8$.
3. Étudier les variations de (u_n) .
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

Cet exercice est un exercice d'entraînement. En effet, on reconnaît une suite arithmético-géométrique. Son étude est donc immédiate !

$$1. \quad -\frac{1}{2}x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{-4}{-1/2} \Leftrightarrow x \leq -4 \times (-2) \Leftrightarrow x \leq 8.$$

On en déduit :

x	$-\infty$	8	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x + 4$	$+$	0	$-$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 8$.

★ $u_0 = 0$. La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_n \leq 8$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} u_n &\leq 8 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n &\leq \frac{1}{2} \times 8 = 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 4 &\leq 4 + 4 = 8 \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &\leq 8 \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 4 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4.$$

D'après la question 1 et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 8$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 8, donc elle est convergente.

Recherchons les points fixes de (u_n) :

$$x = \frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Il y a un seul point fixe. C'est nécessairement la limite. (u_n) converge vers 8.

⇒ Exercice corrigé 7

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

On définit la suite f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

- Déterminer les variations de la fonction f sur $[0 ; 1]$.
- Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,5$.
- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- Montrer que (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Correction :

1. f est dérivable sur $[0 ; 1]$.

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 0,5.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	0,5	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0	0,25	0

$$f(0) = 0 - 0^2 = 0, \quad f(1) = 1 - 1^2 = 0 \quad \text{et} \quad f(0,5) = 0,5 - 0,5^2 = 0,5 - 0,25 = 0,25.$$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 0,5$.

★ $u_0 = 0,5$. La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $0 \leq u_n \leq 0,5$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$0 \leq u_n \leq 0,5$$

$$\Leftrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(0,5) \text{ car la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0 ; 0,5]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 0,25 \text{ puisque } f(0) = 0, f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(0,5) = 0,25$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 0,5$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **1^{re} technique** : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

2^e technique :

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

★ $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{1}{4}$. Donc $u_1 \leq u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \text{ car la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

Recherchons les points fixes de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

f possède donc un seul point fixe : 0. C'est la seule limite possible de (u_n) .

Comme on a vu que (u_n) converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

⇒ Exercice corrigé 8

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{2x+1}{x+1} = x$.
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; 2]$. En déduire $f([0 ; 2])$.

On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$;
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Montrer que (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Correction :

1. L'équation est définie pour $x \neq -1$.

$$\text{Pour } x \neq -1, \frac{2x+1}{x+1} = x \Leftrightarrow 2x+1 = x(x+1) \Leftrightarrow 2x+1 = x^2+x \Leftrightarrow x^2-x-1=0.$$

$$\text{Le discriminant est : } \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1+4 = 5.$$

$$\text{Il y a deux racines : } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. f est dérivable sur $[0 ; 2]$. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $[0 ; 2]$.

$$\text{De plus, } f(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ et } f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{2+1} = \frac{5}{3}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1	$\nearrow \frac{5}{3}$

Ainsi, $f([0; 2]) = \left[1; \frac{5}{3}\right]$. Autrement dit, $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$.

3. Démontrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $1 \leq u_n \leq 2$

★ $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $1 \leq u_n \leq 2$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [1, 2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{3} \text{ car } f(1) = \frac{2 \times 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{5}{3} \text{ et } f(u_n) = u_{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \text{ car } 1 \leq \frac{3}{2} \text{ et } \frac{5}{3} \leq 2.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. # la démonstration par récurrence est une technique solide, ici, pour montrer que la suite est croissante

Démontrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $u_n \leq u_{n+1}$.

★ $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{2}$ donc $u_0 \leq u_1$.

La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_n \leq u_{n+1}$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$:

$$u_n \leq u_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [1, 2] \text{ et que } 1 \leq u_n \leq 2 \text{ pour tout } n$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

(u_n) est donc une suite croissante.

5. # le théorème qui suit est fondamental

(u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

La limite est nécessairement l'un des deux points fixes.

Or, $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2$.

Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.