

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

**Les fiches
indispensables
en mathématiques**

Julien Fernandez

Fonctions et Intégration

I. Premières fonctions usuelles

★ Fonctions affines :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.
 a est le coefficient directeur, b est l'ordonnée à l'origine.
- Dans un repère, la représentation graphique de f est la droite d'équation $y = ax + b$.



• **Signe de $ax + b$:**

$$\begin{aligned} \text{Si } a > 0, \quad ax + b &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ax &\geq -b \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

$$\begin{aligned} \text{Si } a < 0, \quad ax + b &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ax &\geq -b \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

- Variations :
Si $a > 0$, f est croissante, si $a < 0$ f est décroissante.

★ Fonctions polynômes du second degré :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- cas où $c = 0$: $f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$ (on a factorisé par x)
 0 et $-b/a$ sont racines « évidentes ».
Exemple : $x^2 + 2x = x(x + 2)$. 0 et -2 sont racines.
- cas où on reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Exemples : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. 3 et -3 sont racines.
 $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont racines.
 $3x^2 - 1 = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$. $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$ sont racines.
- cas où on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
Exemple : $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. -1 est la seule racine (double).



- Cas général : $\Delta = b^2 - 4ac$

	Résolution de l'équation	Factorisation de $ax^2 + bx + c$	Signe et représentation graphique	
			$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation.		
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a				
$\Delta = 0$	Une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$		
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a				
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$		
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines				

II. Étude des variations d'une fonction & Dérivées



- ★ La technique la plus courante pour étudier les variations d'une fonction f est la suivante :
- On dérive la fonction $f(x)$.
 - On étudie le signe de $f'(x)$.
 - On en déduit les variations de f .



★ Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



★ Dérivées et opérations :

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k \cdot v'}{v^2} \text{ où } v(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ où } v(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

★ Autres formules :

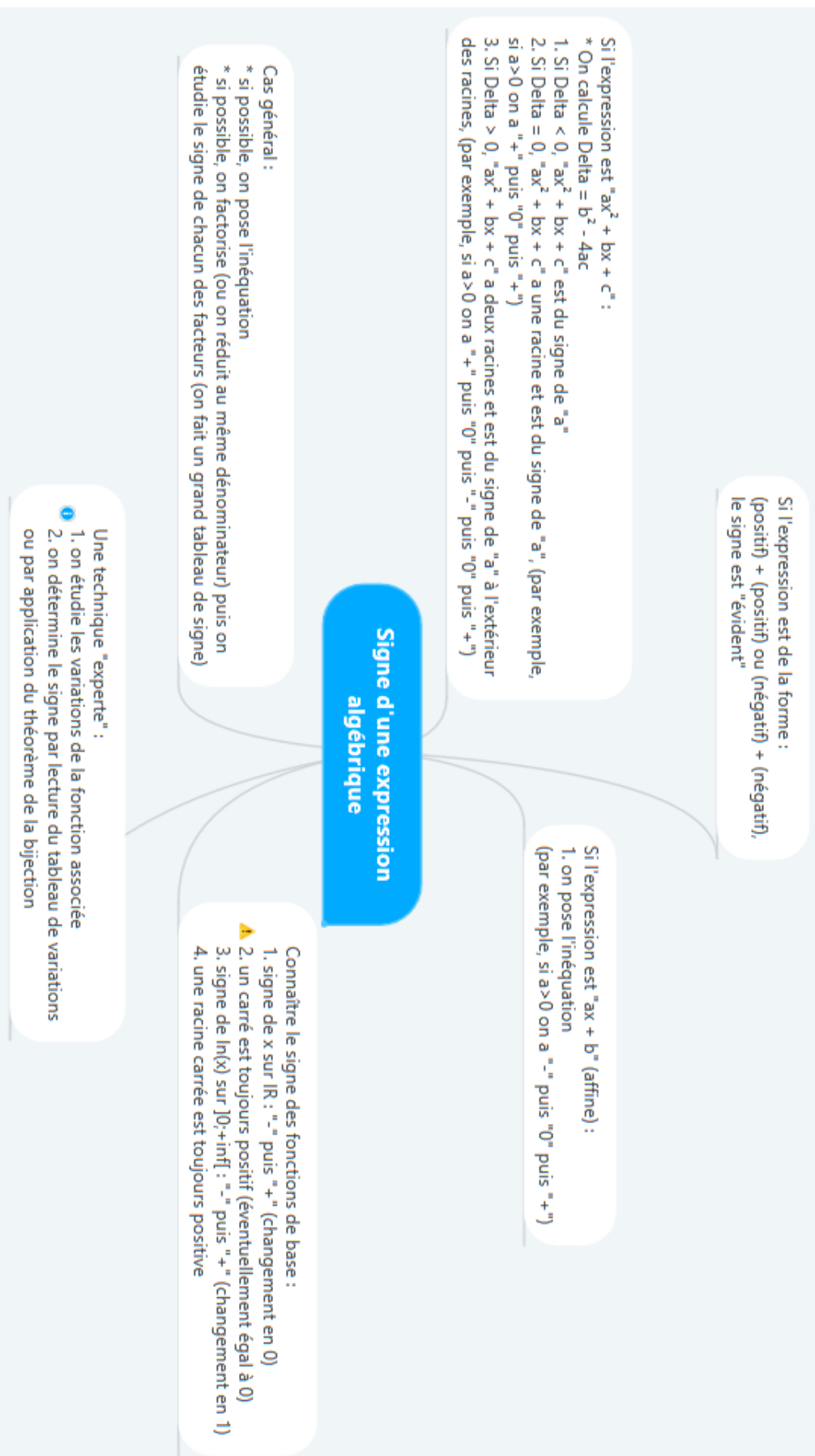
$$(u^2)' = 2u'u ; (u^3)' = 3u'u^2 ; (u^n)' = nu'u^{n-1}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{k}{u^n}\right)' = -n \frac{k u'}{u^{n+1}}$$



★ Étude du signe d'une expression :



III. Limites



★ Limites usuelles

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



★ Opération sur les limites

- Somme :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$
- } par somme de limites,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Différence :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{4}{x} - 2x^2$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$
- } par somme de limites, (on a utilisé : $f(x) = \frac{4}{x} + (-2x^2)$)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- Produit :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = x \left(4 + \frac{2}{x} \right)$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{2}{x} = 4$
- } par produit de limites,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Composée :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^3$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8 \end{array}$$



★ Limites d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini

On applique la règle du monôme de plus haut degré.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

★ Limites en une valeur interdite au dénominateur

- Sauf cas exceptionnel, la limite sera ∞ .
- On étudie le signe du dénominateur.
- On applique la règle des signes pour savoir si le résultat est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : déterminons $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2}{x-1}$.

On détermine d'abord le signe du dénominateur :

$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, d'où

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$



★ Interprétations graphiques : asymptotes horizontales et verticales

- Si f a pour limite ℓ , en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$, est asymptote horizontale à la courbe de f .
- Si f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), en a^+ ou en a^- , on dit que la droite d'équation $x = a$, est asymptote verticale à la courbe de f .

★ Théorèmes sur les limites

f, g, h désignent des fonctions, l et l' deux réels, et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- Compatibilité avec l'ordre

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle et soient

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l', \text{ alors } l \leq l'.$$

- **Théorème d'encadrement (ex "gendarmes")**

Si $g \leq f \leq h$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

- Autres théorèmes de comparaison

- Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (théorème de minoration).

- Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (théorème de majoration).

- **Théorème de la limite monotone :**

Si f est croissante et majorée sur l'intervalle $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b .

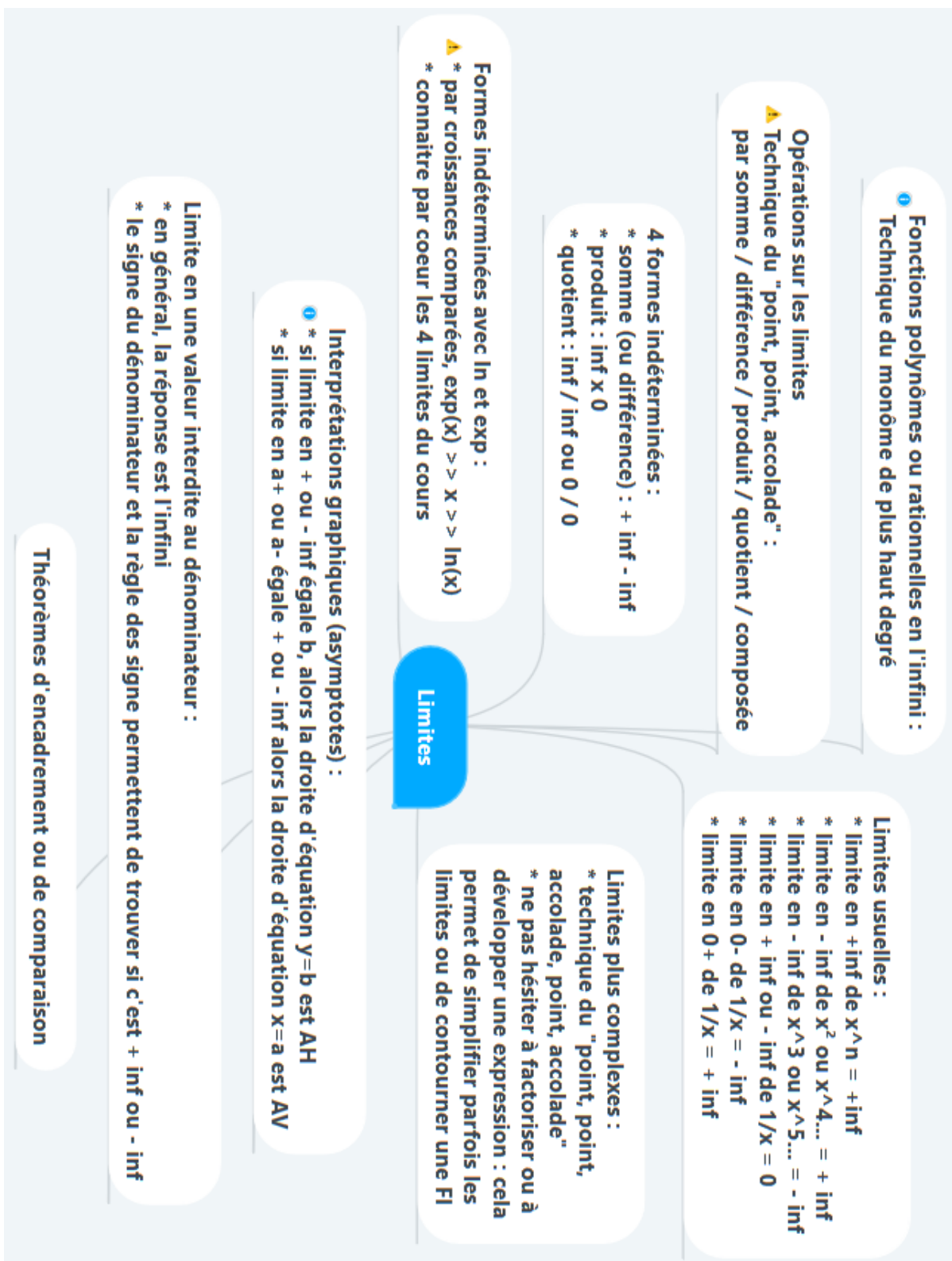
Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a .

Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors f admet pour limite $+\infty$ en b .

(cas analogues avec *non minorée* et/ou *décroissante*)



★ Synthèse :



IV. Questions « classiques »



★ Déterminer une équation de tangente

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$
- de sa dérivée $f'(x)$
- d'une abscisse a

Rédaction « type »

- On calcule $f(a)$.
- On calcule $f'(a)$.
- Une équation de la tangente (phrase de l'énoncé...) est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



★ Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$
- d'une droite d'équation $y = ax + b$

Rédaction « type »

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On montre que $\lim_{+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ selon le cas.



★ Étudier la position relative d'une courbe et d'une droite

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$ dont la courbe C est donnée
- d'une droite D d'équation $y = ax + b$

Rédaction « type »

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On détermine le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors C est au-dessus de D .
- Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors C est au-dessous de D .



★ Équation $g(x) = 0$... ou équation $g(x) = k$, k réel (théorème de la bijection).

On dispose :

- du tableau de variation complet de la fonction g

Rédaction « type »

- g est continue sur $]a, b[$ car dérivable sur $]a, b[$
- g est strictement croissante (ou décroissante) sur $]a, b[$.
- $0 \in g(]a, b[) =]c, d[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur $]a, b[$.

Autre version :

- g est continue sur $]a, b[$ car dérivable sur $]a, b[$
- g est strictement croissante (ou décroissante) sur $]a, b[$.
- $0 \notin g(]a, b[) =]c, d[$

L'équation $g(x) = 0$ ne possède donc pas de solution sur $]a, b[$.

Remarque : bijection

Soit $f : \begin{cases} [a, b] \rightarrow [c, d] \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. Si f est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante),

alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[c, d]$.

★ Montrer que $\alpha \in [m, M]$

On dispose :

- du fait que α est solution unique de l'équation $g(x) = 0$
- de la stricte monotonie de g

Rédaction « type » (cas où g est strictement croissante)

- $g(m) = \dots < 0$
- $g(\alpha) = 0$ par construction
- $g(M) = \dots > 0$

Donc $g(m) < g(\alpha) < g(M)$.

Or, g est strictement croissante sur $[m, M]$.

On en déduit que $m < \alpha < M$.

★ Parité

- Une fonction f , définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est paire lorsque :
 - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
 - pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$
- Une fonction f , définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est impaire lorsque :
 - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
 - pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$

★ Interprétations graphiques de limites C_f est la courbe de f .

- Si $\lim_{a \text{ ou } a^- \text{ ou } a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} f(x) = b$, C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, C_f admet une asympt. oblique d'équation $y = ax + b$.
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, C_f admet une branche parab. de dir. asympt. horizontale (Ox) .
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ ou } -\infty$, C_f admet une branche parab. de dir. asympt. vert. (Oy) .
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, C_f admet une branche parab. de dir. asympt d'équation $y = ax$.

★ Convexité

• **Convexité et tangente :**

Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est convexe (resp. concave) sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus (resp. au dessous) de chacune de ses tangentes.

Exemples : la fonction carrée et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine et la fonction logarithme népérien sont concaves sur $]0, +\infty[$.

• **Convexité et cordes :**

Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est convexe (resp. concave) sur I si la courbe est au-dessous (resp. au dessus) des cordes.

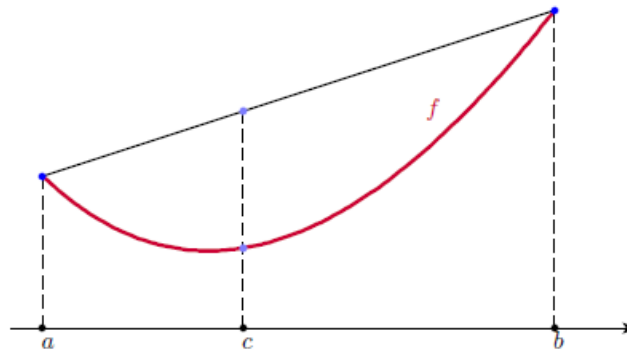


FIGURE 1 – Définition visuelle

• **Convexité et dérivée seconde :**

f est une fonction définie sur $]a, b[$, si la dérivée seconde f'' existe sur $]a, b[$ alors :

- si, pour tout réel x de $]a, b[$, $f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur $]a, b[$.
- si, pour tout réel x de $]a, b[$, $f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur $]a, b[$.

★ Point d'inflexion

- Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- Tout point où la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe est un point d'inflexion.

V. Fonctions logarithme et exponentielle



★ Fonction logarithme

- La fonction logarithme népérien est l'unique fonction qui a pour dérivée $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note $\ln$.
- Conséquences immédiates :
 - ✓ $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$. Elle n'est pas définie en 0, ni pour les nombres négatifs.
 - ✓ $\ln 1 = 0$
 - ✓ $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

• Formules

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln a^n = n \ln a$$

• Variations et signe

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x de $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$. Pour tout x de $]0; 1[$, $\ln x < 0$.

• Limites

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale d'équation $x = 0$).

Exemple 1 : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x) = +\infty \quad (\text{on a utilisé : } x^2 - \ln x = x^2 + (-\ln x))$$

Exemple 2 : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$.

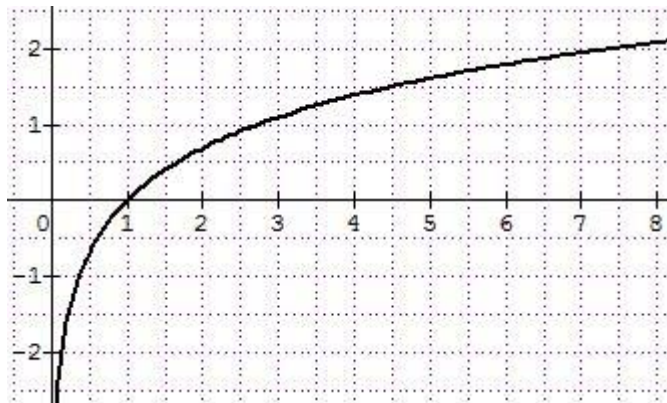
$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad (\text{on a utilisé : } \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x)$$

- **Croissances comparées**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: à l'infini, toute puissance de x l'emporte sur $\ln$.

Exemple 3 : déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$
- par croissances comparées,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = +\infty$ (on a utilisé : $x^2 - \ln x = x^2 + (-\ln x)$)





★ Fonction exponentielle

- La fonction $\ln$ est strictement croissante de $]0 ; +\infty[$ sur $] -\infty ; +\infty[$. Alors pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; +\infty[$, l'équation $\ln y = x$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[: e^x$.

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la fonction réciproque de $\ln$.

- Quelques conséquences immédiates :

- ✓ $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- ✓ $e^0 = 1 ; e^1 = e$.
- ✓ Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- ✓ Pour tout réel $x > 0$ $e^{\ln x} = x$.

$$\bullet \quad (e^x)' = e^x \qquad (e^{-x})' = -e^{-x} \qquad (e^{ax})' = a e^{ax} \qquad (e^u)' = u' e^u.$$

- Formules**

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^n = e^{an}$$

- Variations et signe**

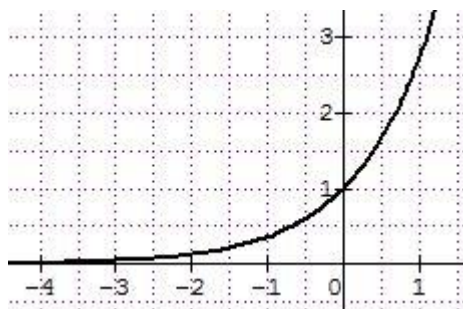
$\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $e^x > 0$.

- Limites**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$)

- Croissances comparées**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$: à l'infini, $\exp$ l'emporte sur toute puissance de x .



VI. Primitives des fonctions usuelles

★ Primitive de f sur I :

- ✓ Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . F est une primitive de f sur I , si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f . $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
- ✓ Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet des primitives sur I .
- ✓ Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I , alors :
 - les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \rightarrow F(x) + k, k \in \mathbb{R}$;
 - il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur y_0 en x_0 .



★ Primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Une primitive	Intervalle
$x \mapsto k$ $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $] -\infty ; 0 [$ ou $] 0 ; +\infty [$ si $n < -1$
$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

★ Autres formules de primitive :

Fonction	Une primitive
$u' u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ u ne s'annule pas sur I lorsque $n < 0$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ u strictement positive sur I	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ u strictement positive sur I	$\ln u$
$u' e^u$	e^u

VII. Intégrales



★ Intégrale et primitive :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ où } F \text{ est une primitive quelconque de } f \text{ sur } I.$$

Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$.

Exemple 1 : calculer $I = \int_0^1 (x^3 + x^2 + x - 1) dx$.

$$I = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 1 \right) - (0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3+4+6-12}{12} = \frac{1}{12}.$$

Exemple 2 : calculer $J = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$.

$$J = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{2} + \ln 2 \right) - \left(-\frac{1}{2 \times 1^2} - \frac{1}{1} + \ln 1 \right).$$

$$J = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8} + \ln 2.$$

★ Propriétés de l'intégrale



• Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



• Linéarité

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad ; \quad \int_a^b (k f)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

• Positivité

Si f est positive sur $[a ; b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

On peut en déduire le signe d'une intégrale selon le signe de f et le sens de a et b .

• Conservation de l'ordre

Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $[0, 6]$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\int_0^6 f(x) dx$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx,$$

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 x dx + \int_2^3 -x dx + \int_3^6 0 dx,$$

$$\int_0^6 f(x) dx = 0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[-\frac{x^2}{2} \right]_2^3 + 0,$$

$$\int_0^6 f(x) dx = \left(\frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \right) + \left(-\frac{3^2}{2} \right) - \left(-\frac{2^2}{2} \right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

★ Intégrale et aire

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le réel $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



★ Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que u' et v' sont continues sur I . On a : $\int u v' = [u v] - \int u' v$.

Exemple : calculer $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$

Rédaction « type »

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues et dérivables sur $[0, 1]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx = (-e^{-1}) - (0) - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

★ Fonction définie par une intégrale

Soient g une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I .

La fonction f définie sur I par $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ est l'unique primitive de g sur I qui s'annule en a . Autrement dit, f est une fonction dérivable sur I et $f'(x) = g(x)$.

Exemple : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

★ Intégrales & Suites

L'idée consiste à considérer, pour tout n de $\mathbf{N}$, une suite de fonctions $f_n(x)$ définies et continues sur un intervalle $[a, b]$, puis d'étudier la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, I_n = \int_a^b f_n(x) dx.$$

Il s'agit alors d'étudier la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (monotonie, convergence...).

Dans beaucoup d'exercices types, $I_0 = \int_a^b f(x) dx$ et, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $I_n = \int_a^b x^n f(x) dx$.

★ Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et soient $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ ses points de discontinuités.

L'intégrale de a à b est le nombre réel défini par : $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$.

★ Intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

✓ Lorsque $\int_a^A f(x) dx$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, on définit l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

✓ On écrit alors : « sous réserve de convergence, $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$. »

✓ On étend cette définition à $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

« sous réserve de convergence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x) dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$. »

VIII. Représentation graphique

★ Conseils :

Pour représenter graphiquement une fonction :

- on travaille proprement au crayon gris dans un repère (O, I, J) (trois points suffisent),
- on porte toutes les informations remarquables évoquées par l'énoncé (extremum, c'est-à-dire minimum ou maximum, tangente, asymptotes, ...)
- on construit point par point avec abscisses x et ordonnées $f(x)$ (pour construire une droite, deux points suffisent) à l'aide, si besoin, des valeurs remarquables ci-dessous.



★ Valeurs remarquables :

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \quad \ln(2) \approx 0,7 \quad e \approx 2,7 \quad e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,4$$

Suites

I. Suites arithmétiques

- ★ (u_n) est une suite arithmétique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1} - u_n = a$ où a est une constante réelle.



- ★ Si (u_n) est une suite arithmétique de raison a , alors :

$$u_n = u_0 + n \times a$$

ou bien

$$u_n = u_1 + (n-1) \times a$$

- ★ Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on part de $u_{n+1} - u_n$.
Le résultat doit être une constante.



- ★ Une somme particulière :

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

II. Suites géométriques

- ★ (v_n) est une suite géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $v_{n+1} = b \times v_n$ où b est une constante réelle.



- ★ Si (v_n) est une suite géométrique, alors :

$$v_n = v_0 \times b^n$$

ou bien

$$v_n = v_1 \times b^{n-1}$$

- ★ Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de v_{n+1} .
Le résultat doit être $b \times v_n$.



- ★ Limite et suite géométrique :

$$\text{si } |q| < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad ; \quad \text{si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$



- ★ Une somme particulière :

$$1 + b + \dots + b^n = \sum_{k=0}^{k=n} b^k = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$$



III. Suites arithmético-géométriques

- ★ (u_n) est une suite arithmético-géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des constantes réelles.
- ★ Pour déterminer le terme d'une suite arithmético-géométrique :
 - On détermine le réel l tel que $l = al + b$.
 - On pose $v_n = u_n - l$. On montre que (v_n) est une suite géométrique.
 - On détermine l'expression de v_n ($v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_1 \times q^{n-1}$) puis on en déduit l'expression de u_n ($u_n = v_n + l$).
- ★ On peut également parfois en déduire la limite de u_n .



IV. Démonstration par récurrence

Exemple 1 : (cas d'une relation de récurrence)

On considère une suite de matrices de matrice initiale X_0 définie par $X_{n+1} = AX_n$.

Démontrer que $X_n = A^n X_0$.

Rédaction « type »

- $A^0 X_0 = I \times X_0 = X_0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $X_n = A^n X_0$.
Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2 : (cas d'une inégalité)

Données : g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - e^{-x}$.

On sait que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

Rédaction « type »

- $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $1 \leq u_n \leq 2$.
Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow g(1) \leq g(u_n) \leq g(2) \text{ car } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$
Or, $g(1) = 2 - e^{-1} \approx 2 - 0,37 \geq 1$, $g(2) = 2 - e^{-2} \leq 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
On en déduit que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V. Suites croissantes, majorées, minorées, bornées

★ Une suite (u_n) est croissante si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.



★ Pour déterminer les variations d'une suite (u_n) , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, (u_n) est croissante et si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, (u_n) est décroissante.

★ Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Une suite (u_n) est bornée s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$,
 $m \leq u_n \leq M$.

VI. Théorèmes de convergence

★ Théorème de minoration :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

★ Théorème de majoration :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



★ Théorème d'encadrement (des gendarmes) :

Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.



★ Suites monotones et convergences – théorème de convergence monotone :

Toute suite croissante et majorée est convergente (on ne connaît pas, à ce stade, la limite).

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

★ Soit une suite u définie par u_0 et, pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si f est continue sur I et si u est convergente, alors : $l = f(l)$ (point fixe).

Matrices

I. Calculs matriciels

★ Addition de matrices :

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ 3+5 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

★ Multiplication d'une matrice par un réel :

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ donc $2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; $-3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$

★ Multiplication de matrices :

Exemple :

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 5 & 1 \times (-1) + 2 \times 3 \\ 3 \times 2 + 4 \times 5 & 3 \times (-1) + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 26 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attention, en général, $A \times B \neq B \times A$.

★ Matrices particulières :

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices *Identité*. $A \times I = I \times A = A$.

$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et O_3 sont des matrices nulles. $A \times O = O \times A = O$.

II. Inverse d'une matrice

- ★ On dit que deux matrices A et B sont inverses l'une de l'autre, ou que B est l'inverse de A si $A \times B = I$. On note alors $B = A^{-1}$.



- ★ Cas des matrices 2×2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.



- ★ Cas où la réponse est donnée... ou presque :

Soient deux matrices P et Q telles que $P \times Q = kI$. Alors P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{k}Q$.

Exemple 1 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$. Conclure.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 1 \times (-1) + 1 \times 1 & 1 \times 2 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc A est inversible $A^{-1} = B$.

Exemple 2 : On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $C \times D$. Conclure.

$$C \times D = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times (-2) & 1 \times 2 + (-2) \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times (-2) & 2 \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I.$$

Donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{5}D$.

Ces exemples se généralisent bien sûr à des matrices 3×3 ...

Exemple 3 : On considère une matrice N telle que $N^3 = O$ et la matrice $T = I + N$.

1. Calculer $(I + N)(I - N + N^2)$.

2. En déduire que T est inversible et déterminer T^{-1} .

Correction : 1. $(I + N)(I - N + N^2) = I - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I + N^3 = I$.

2. On en déduit que T est inversible et que $T^{-1} = I - N + N^2$.



★ Matrice inverse et polynôme annulateur :

Exemple :

Soit une matrice A donnée. On suppose qu'on a prouvé que $A^2 - A - 2I = 0$.

En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

$$A^2 - A - 2I = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - A = 2I$$

$$\Leftrightarrow A(A - I) = 2I \text{ (on reconnaît la propriété du paragraphe précédent)}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{A - I}{2}$ (qu'il reste à calculer).

★ Matrice inverse par résolution de système

Exemple : calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On résout le système : $(S) \quad \begin{cases} -x & + & 2z & = & a & L_1 \\ & & z & = & b & L_2 \\ & -y & + & z & = & c & L_3 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x & + & 2z & = & a & L_1 \leftarrow L_1 \\ & y & & = & b - c & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ & & z & = & b & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est triangulaire. La matrice A est donc inversible.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b & L_1 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ y = b - c & L_2 \leftarrow L_2 \\ z = b & L_3 \leftarrow L_3 \end{cases}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

★ Matrice inverse par pivot de Gauss

Exemple : calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_1 - L_3 \end{array}$$

(on s'est servi de L_1 , et on a fait apparaître des 0 dans la matrice de gauche en première position des lignes 2 et 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3$$

(on s'est servi de L_2 , et on a fait apparaître un 0 dans la matrice de gauche en deuxième position de la ligne 3)



La matrice de gauche est triangulaire à pivots non nuls donc A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

(on s'est servi de L_3 , et on a fait apparaître un 0 dans la matrice de gauche en dernière position des lignes 1 et 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

(on s'est servi de L_2 , et on a fait apparaître un 0 dans la matrice de gauche en deuxième position de la ligne 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow -L_3$$

(on ajuste les coefficient diagonaux de la matrice de gauche)

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

III. Puissance n -ième d'une matrice

★ Le calcul de la puissance n -ième d'une matrice est un exercice délicat.

Deux exceptions notables :



- La puissance n -ième d'une matrice diagonale est obtenue en élevant à la puissance n ses éléments diagonaux.

Exemple : si $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ car D est diagonale.

Ce résultat est à savoir. Il se démontre par récurrence.

- Si la « formule » est donnée, on peut la démontrer par récurrence.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

★ Puissance n -ième à l'aide de suites

Exercice corrigée : On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ où (a_n) est la suite définie par

$$a_1 = 1 \text{ et } a_{n+1} = 1 + 2a_n.$$

2. Calculer a_n . En déduire A^n .

Correction :

1. Démontrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

• $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A^1$. La propriété est vraie au rang 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2a_n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

• D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a_n) est une suite arithmético-géométrique (voir partie correspondante).

On trouve $a_n = 2^n - 1$ puis $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

★ Puissance n -ième et formule du binôme de Newton

Le principe est le suivant : on dispose

- d'une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale
- on a prouvé que $N = A - I$ est une matrice nilpotente (ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang, en général, $N^3 = O$).

→ On calcule alors A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exemple : On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $n \geq 2$, calculer A^n en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme. (On sait que $N^3 = O$).



• pour $k \geq 3$, $N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times O = O$

• $A^n = (N + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \times I^{n-k} = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$.

Il ne « reste » plus qu'à effectuer le calcul à l'aide de N et N^2 ...

★ Puissance n -ième à l'aide d'une matrice diagonale

Le principe est le suivant : on dispose

- de deux matrices A et P .
- on a calculé P^{-1} puis on a prouvé que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
- on connaît donc D^n .
- Notons que $D = P^{-1}AP$ s'écrit $A = PDP^{-1}$.



On démontre alors par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$:

- $PD^0P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I = A^0$.
La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n \times (P^{-1} \times P) \times DP^{-1}.$$

$$A^{n+1} = PD^n \times I \times DP^{-1} = P \times (D^n \times D) \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}.$$
 La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il ne « reste » plus qu'à effectuer le calcul : $P \times D^n \times P^{-1} \dots$

IV. Réduction des matrices carrées

★ Matrices carrées diagonalisables :

Une matrice carrée A est **diagonalisable** s'il existe une matrice D , diagonale, et une matrice carrée P , inversible, telles que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.



$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Leftrightarrow A \cdot P = P \cdot D \Leftrightarrow D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

★ Valeur propre et vecteur propre d'une matrice

Soient A une matrice carrée et X une matrice colonne (vecteur) non nulle. S'il existe un réel λ tel que $AX = \lambda X$, on dit que λ est **valeur propre de la matrice A** et que X est un **un vecteur propre de A** associé à la valeur propre λ .

**Construction de D et P**

La matrice D est une matrice diagonale construite à l'aide des valeurs propres

La matrice P est obtenue par juxtaposition de vecteurs propres associés à chaque valeur propre (en conservant l'ordre).

**Exercice corrigé :**

Soient les matrices A et P carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les matrices $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que X , Y et Z sont des vecteurs propres de A et préciser leurs valeurs propres associées.

2. Calculer $P \times Q$. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .

3. (a) Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$.

(b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

(c) En déduire que pour tout nombre entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^{n-1}} - 2 & 2^n - 1 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Correction :

$$1. \quad A \times X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2 \times X.$$

X est vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre $1/2$.

$$A \times Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times Y.$$

Y est vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre 1 .

$$A \times Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2Z.$$

Z est vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre 2 .

$$2. \quad P \times Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. \text{ Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = Q$$

3. (a) Calculons $P^{-1}AP = QAP$:

$$A \times P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q \times A \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

ou bien :

$$Q \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q \times A \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

ou bien (le calcul matriciel est malgré tout sécurisé) :

On observe que P est inversible et est constituée par la juxtaposition des trois vecteurs propres X , Y et Z . La matrice A est donc diagonalisable et la matrice D est constituée des valeurs propres (associées dans l'ordre) sur la diagonale. On en déduit :

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Remarquons tout d'abord que $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = (PP^{-1})A(P^{-1}P) \Leftrightarrow PDP^{-1} = A$

Démontrons par récurrence que : $\forall n \geq 0, A^n = PD^nP^{-1}$:

- $PD^0P = PIP = P^2 = I = A^0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que

$A^n = PD^nP^{-1}$, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PD(PP^{-1})D^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

(c) D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Calculons $A^n = PD^nP^{-1} = PD^nQ$.

$$D^n \times Q = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (1/2)^n & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & (1/2)^n & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(1/2)^n - 2 & -1 + 2^n \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } (1/2)^n = \frac{1}{2^n} \text{ et } 2(1/2)^n = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ finalement : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^{n-1}} - 2 & 2^n - 1 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

ou bien :

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (1/2)^n & 1 & 2^n \\ (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} 2 \times (1/2)^n & 1 & 2^n \\ (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times (1/2)^n - 2 & -1 + 2^n \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \dots$$

★ **Détermination des valeurs propres de A dans la cas où on dispose d'un polynôme annulateur de A**

- Si P est un polynôme annulateur de A , toute valeur propre de A est racine de P .
 $\Rightarrow$ Si l'on dispose d'un polynôme annulateur de A , on recherche les valeurs propres de A parmi les racines de ce polynôme.
- $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Pour déterminer les racines d'un polynôme P du troisième degré, on cherche une racine évidente a puis soit on effectue la division euclidienne de P par $x-a$, soit on applique l'algorithme de Hörner.

Exemple : Déterminer les racines du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6.$$

$$P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 - 7 \times 1 + 6 = 0, \text{ donc } 1 \text{ est racine (évidente).}$$

Méthode 1 : on effectue la division euclidienne de P par $x-1$.

$2x^3$	$-x^2$	$-7x + 6$	$x - 1$
$2x^3$	$-2x^2$		
x^2			$2x^2 + x - 6$
	$-7x + 6$		
	x^2	$-x$	
	$-6x + 6$		
		$-6x + 6$	
		0	

Méthode 2 : on applique l'algorithme de Hörner.

	2	-1	-7	6
1	↓	↗ 2	1	-6
	2	1	-6	0

On en déduit que $P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 6)$.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $2x^2 + x - 6$ à l'aide du discriminant (on trouve $\Delta = 49$ puis -2 et $3/2$).

Les trois racines de P sont -2 , 1 et $3/2$.

★ Calcul d'un vecteur propre associé à une valeur propre connue

Si λ est valeur propre de la matrice A , alors un vecteur propre de A associé à λ est un vecteur générateur (ou des vecteurs générateurs) des solutions du système d'équation $(A - \lambda I)X = 0$. Cette propriété découle naturellement de l'écriture $AX = \lambda X$.

Ainsi, si l'on connaît les valeurs propres d'une matrice, il est possible de calculer des vecteurs propres associés à chacune d'elles puis de déterminer D et P ...

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. Déterminer les vecteurs propres associés.

-
1. $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donc

$X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A .

Les valeurs propres possibles de A sont les racines de $X^2 - 3X + 2$, donc 1 et 2 (faire Δ).

2. On résout les systèmes $(A - I)X = 0$ puis $(A - 2I)X = 0$ où X est le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,5x + 0,5y \\ 0,5x + 0,5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0,5x + 0,5y = 0 \\ \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

En prenant $x=1$, on trouve qu'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vérification : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($AX = \lambda X$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de 1).

$$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,5x + 0,5y \\ 0,5x - 0,5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -0,5x + 0,5y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

En prenant $x=1$, on trouve qu'un vecteur propre associé à la valeur propre 2 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérification : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($AX = \lambda X$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de 2).

★ Construction de D et P

Les valeurs propres donnent, par exemple, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et les vecteurs propres permettent

d'obtenir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (respecter l'ordre des éléments).

Probabilités



I. Généralités

★ Formule du crible :

Pour tous événements A et B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

★ Événements contraires

Si A est un événement et $\bar{A}$ son événement contraire, alors $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

★ Événements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$p(A \cap B) = 0 ;$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) .$$

★ Équiprobabilité

Si les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

II. Dénombrements

★ Tirages successifs avec ou sans remise

On utilise le **principe multiplicatif**.

Exemples :

Si on tire 4 boules successivement avec remise dans une urne en contenant 6, on a :

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296 \text{ résultats possibles.}$$

Si on tire 4 boules successivement sans remise dans une urne en contenant 6, on a :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ résultats possibles.}$$



★ Tirages simultanés & nombres « k parmi n »

- Factorielle d'un entier naturel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Par convention, $0! = 1$ et $1! = 1$.

- Le nombre de tirages de k boules dans une urne parmi n est : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

Ce nombre se calcule à l'aide de la formule ou à l'aide du triangle de Pascal.



$$\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{n} = 1 ; \binom{n}{1} = n ; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



- Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

III. Probabilités conditionnelles

★ Probabilité conditionnelle :



on appelle probabilité de B sachant A le réel $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

★ Événements indépendants :



- Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$.

★ Formule des probabilités composées :

La formule des probabilités conditionnelles permet d'écrire :

Soient A et B des événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$. Alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Cette formule se généralise par la formule des probabilités composées :



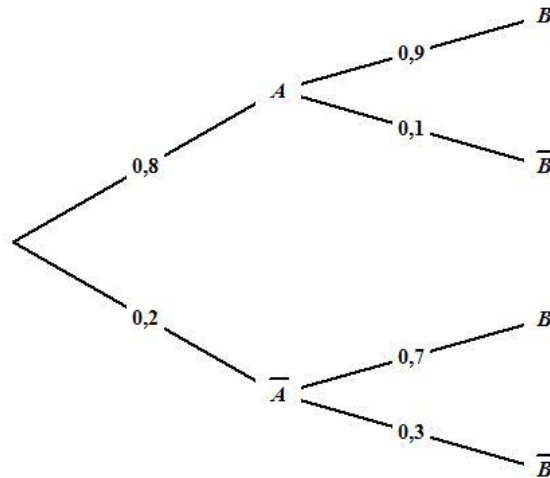
Soient A_1, A_2 et A_3 des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$.

Alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_m$ des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$.

Alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$.

★ Arbre à calculs et formule des probabilités totales

Exemple :**Rédaction « type »**

- A et $\bar{A}$ constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

- $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

$$P(B) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,7$$

$$P(B) = 0,72 + 0,14 = 0,86$$

(on peut aussi noter $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$)**IV. Lois de probabilités discrètes**

★ Généralités :

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X , c'est présenter l'ensemble des valeurs x_i prises par X et calculer les probabilités $P[X = x_i]$ correspondantes.

Cette présentation se fait généralement à l'aide d'un tableau ou à l'aide d'une formule.

★ Fonction de répartition :

- La fonction de répartition d'une v.a. X est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = p(X \leq x).$$

- On a donc : $p(X \leq a) = F(a)$, $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ et $p(X \geq a) = 1 - F(a)$

★ Variable aléatoires discrètes finies

• **Espérance :**

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i = \sum_i x_i p[X = x_i]$$

• **Variance :**

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2.$$



Formule de Koenig-Huygens : on démontre que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$\text{Ainsi, } V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$

$$\text{Remarque : } E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$$

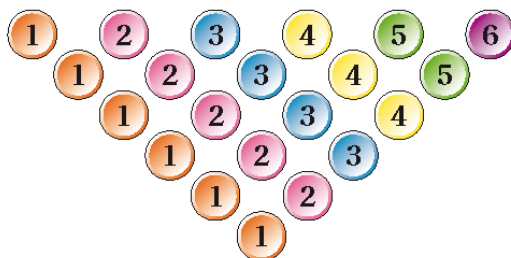
• **Écart type :**

$$\text{Écart type : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice corrigé :

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.

On pioche au hasard un jeton du sac.



Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton.

On définit la variable aléatoire X qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$.
4. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

Correction :

1. Chaque jeton rapporte 1 à 6 euros et la mise est de 3 euros. Donc $X(\Omega) = \llbracket -2, 3 \rrbracket$.

2. Il y a 6 jetons numérotés 1 sur les 21. Donc $p(X = -2) = \frac{6}{21}$.

On procède de la même façon pour les autres valeurs pour obtenir la loi de probabilité :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$3. E(X) = \frac{6}{21} \times (-2) + \frac{5}{21} \times (-1) + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{3}{21} \times 1 + \frac{2}{21} \times 2 + \frac{1}{21} \times 3 = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}.$$

$$4. E(X^2) = \frac{6}{21} \times (-2)^2 + \frac{5}{21} \times (-1)^2 + \frac{4}{21} \times 0^2 + \frac{3}{21} \times 1^2 + \frac{2}{21} \times 2^2 + \frac{1}{21} \times 3^2$$

$$E(X^2) = \frac{6}{21} \times 4 + \frac{5}{21} \times 1 + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{3}{21} \times 1 + \frac{2}{21} \times 4 + \frac{1}{21} \times 9 = \frac{49}{21} = \frac{7 \times 7}{7 \times 3} = \frac{7}{3}$$

On en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{9} = \frac{21-1}{9} = \frac{20}{9}.$$

$$\text{Finalement, } \sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

★ Variable aléatoires discrètes infinies

- **Espérance :**

$$E(X) = \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} k p_k$$

- **Variance :**

$$V(X) = \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} (k - E(X))^2 p_k \quad \text{ou} \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} k^2 p_k - (E(X))^2$$

• **Sommes et séries :**

- ✓ La manière usuelle de définir **la série** $\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, c'est de considérer la suite des sommes partielles $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ puis d'étudier sa limite lorsque n tend vers l'infini. Si cette limite existe et est finie, on dit que Σ converge et la limite est considérée comme étant « la valeur » de Σ .

- ✓ Séries géométriques et dérivées :
convergence si $|q| < 1$, divergent sinon



$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

- ✓ Série exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \text{ pour tout réel } x.$$



- ✓ Rappels de sommes :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_0$$

somme télescopique : $\sum_{k=0}^n (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0$



★ **Propriétés de l'espérance**

Par linéarité de l'espérance :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$



★ **Propriétés de la variance**

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

Si X et Y sont *indépendantes* : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque : dans le cas général, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.

V. Lois de probabilités usuelles discrètes

★ Loi certaine :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire certaine égale à a . On a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{a\} & ; & & P[X = a] &= 1. \\ E(X) &= a & ; & & V(X) &= 0. \end{aligned}$$



★ Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \llbracket 1, n \rrbracket & ; & & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P[X = k] &= \frac{1}{n} \\ E(X) &= \frac{n+1}{2} & ; & & V(X) &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.



★ Loi de Bernoulli

On considère la variable aléatoire X qui associe 1 à l'issue de l'épreuve et 0 sinon.

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p .

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{0; 1\} & ; & & P[X = 1] &= p \text{ et } P[X = 0] = 1-p \\ E(X) &= p & ; & & V(X) &= p(1-p) \end{aligned}$$



★ Loi binomiale

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \llbracket 0, n \rrbracket & ; & & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) &= np & ; & & V(X) = np(1-p) \end{aligned}$$

Exemple :

On lance dix fois un dé à six faces bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois que le 5 est obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Rédaction « type »

On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le 5 est obtenu, avec la probabilité $1/6$;
- échec : le 5 n'est pas obtenu, avec la probabilité $5/6$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et $1/6$.

Dès lors, dans cet exemple :

- $X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket$
- Pour tout entier $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$
- $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$
- $V(X) = n \times p \times (1-p) = \frac{5}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$



★ Loi géométrique

La loi géométrique de paramètre p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes, la variable aléatoire X étant le temps d'attente du premier succès.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbb{N}^* & ; & \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X = k) = p(1-p)^{k-1} \\ E(X) &= \frac{1}{p} & ; & \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Exemple :

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. On note Y le rang de du premier pile obtenu. Quelle est la loi suivie par Y ?



Rédaction « type »

On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : pile est obtenu, avec la probabilité 0,3 ;
- échec : face est obtenu, avec la probabilité 0,7.

Y est le temps d'attente du premier succès.

Y suit donc la loi géométrique de paramètre 0,3.

Dès lors, dans cet exemple :

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = 0,7^{k-1} \times 0,3$
- $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$
- $V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0,7}{0,09} = \frac{70}{9}$



★ Loi de Poisson (Siméon Denis Poisson 1781-1840)

Si une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$ de paramètre $m > 0$ ($X \hookrightarrow \mathcal{P}(m)$) :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbb{N} & ; & \quad \forall k \in \mathbb{N}, p(X = k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!} \\ E(X) &= m & ; & \quad V(X) = m \end{aligned}$$

Le calcul des probabilités se fait en général par utilisation de valeurs données.



VI. Loi conjointe et couple de variables aléatoires

★ Loi conjointe :

Soient X et Y deux variables aléatoires.

On appelle loi conjointe la loi de probabilité du couple (X, Y) .

Exemple :

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi de X
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de Y	0,2	0,3	0,5	1

- Les lois obtenues par sommation des lignes et des colonnes sont appelées lois marginales. Il s'agit en fait de la loi de X et de celle de Y .
- On a $P([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0,3$ et on peut vérifier que la somme de toutes les probabilités est égale à 1.

★ Indépendance de variables aléatoires conjointes

On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x_i, y_j) \in \{0,1\} \times \{0,1,2\}, P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i]) \times P([Y = y_j]).$$

Exemple :

$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
$X = 1$	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
Loi de Y	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

$$P([X = 0]) \times P([Y = 0]) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}. \text{ Or } P([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{16}{49}.$$

On vérifie les trois autres cas... X et Y sont indépendantes.

(ce n'était pas le cas dans l'exemple d'avant).

★ Covariance

- On appelle **covariance** de X et Y et on note $\text{cov}(X, Y)$ le réel
 $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ avec $E(XY) = \sum x_i \times y_j \times P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$
 et où $E(X)$ et $E(Y)$ sont les espérances respectives de X et Y .
- Si $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ alors X et Y ne sont pas indépendantes (réciproque fausse).
- Dans le cas général, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.
- $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$.

**Exemple :**

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi de X
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de Y	0,2	0,3	0,5	1

$$E(X) = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,6 = 0,6.$$

$$E(Y) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,5 = 1,3.$$

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0,1 + 0 \times 1 \times 0,1 + 0 \times 2 \times 0,2 + 1 \times 0 \times 0,1 + 1 \times 1 \times 0,2 + 1 \times 2 \times 0,3 = 0,8.$$

$$\text{cov}(X, Y) = 0,8 - 0,6 \times 1,3 = 0,8 - 0,78 = 0,02$$

★ Coefficient de corrélation

- Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
- On a :
 - $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
 - $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, $Y = aX + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
 - $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, $Y = aX + b$ avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
 - Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X, Y) = 0$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$, alors $\rho(\lambda X, \mu Y) = \rho(X, Y)$.

VII. Lois à densité

★ Compléments sur la continuité et la dérivabilité :

- Toute fonction dérivable sur un intervalle y est continue.
- Contraposée : toute fonction non continue en un point n'est pas dérivable en ce point.
- Soit f une fonction définie par morceaux à gauche et à droite d'un point a .
 f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

★ Compléments sur les intégrales :

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et soient
 $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ ses points de discontinuités éventuels.

On appelle intégrale de a à b le nombre réel défini par : $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$.



- Sous réserve de convergence, $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$.

★ Fonction de répartition



- Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$.
- Lorsque la fonction de répartition F de X est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f = F'$, la loi de probabilité de X est définie par une intégrale :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

- On a donc : $\int_{-\infty}^a f(t) dt = F(a)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 1 - F(a)$.

★ Densité de probabilité

Plus généralement, une variable aléatoire X admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ où f est une fonction continue par morceaux et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.



Toute fonction f :

- ★ continue sur $\mathbb{R}$ (sauf, éventuellement, pour des points isolés)
- ★ positive sur $\mathbb{R}$
- ★ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

peut être considérée comme une densité de probabilité.

★ **Espérance, variance**

- Lorsque l'intégrale existe, la v.a. X de densité f admet pour espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

- Lorsque l'intégrale existe, la v.a. X de densité f admet pour variance :

$$V(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (E(X) - t)^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - (E(X))^2$$

- Rappel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

VIII. Loïs à densité usuelles★ **Loi uniforme :**

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$ alors :

$$X \text{ admet pour densité : } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$E(X) = \frac{1}{2}, V(X) = \frac{1}{12} \text{ et } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$ alors :

$$X \text{ admet pour densité : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \text{ et } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$



★ Loi exponentielle :

- Soit X est une v.a. suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$) où $\lambda > 0$:

$$X \text{ admet pour densité : } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Absence de mémoire :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Alors pour tous réels positifs (x, t) : $P_{(X>x)}(X > x+t) = P(X > t)$.

On parle alors de durée de vie sans vieillissement ou d'absence de mémoire.

★ Loi normale :

- Soit X est une v.a. suivant la loi normale centrée réduite de paramètres m et σ^2 ($X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) :

$$X \text{ admet pour densité : } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad E(X) = m, \quad V(X) = \sigma^2$$

- Loi normale centrée réduite : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$Z \text{ admet pour densité : } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad E(Z) = 0, \quad V(Z) = 1$$

Des valeurs de la fonction de répartition Φ de $\mathcal{N}(0,1)$ sont données dans les énoncés. On a : $\Phi(b) = P(Z \leq b)$ et $\Phi(-b) = 1 - \Phi(b)$.

- Soient X et Z deux variables aléatoires telles que : $Z = \frac{X - m}{\sigma}$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Conséquence : n'importe quelle probabilité liée à une loi normale se détermine en se ramenant à la loi normale centrée réduite et à l'utilisation de sa fonction de répartition.

IX. Convergences et approximations



★ Inégalité de Markov :

Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité.

Si X est positive et admet une espérance, alors :

$$\forall a > 0, P([X \geq a]) \leq \frac{E(X)}{a}.$$



★ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité. Si X admet une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P([|X - E(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

★ Loi faible des grands nombres

- D'une façon générale, si l'on considère n épreuves identiques consécutives, on démontre que la fréquence relative d'un événement tend vers la probabilité de cet événement lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

$$\text{Alors } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P([|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon]) = 0.$$

X. Estimation

★ Estimation ponctuelle :

- Le principe : Il s'agit d'élaborer une stratégie d'estimation d'un paramètre θ en raisonnant sur des variables aléatoires.
- Soit $n \geq 1$ fixé. Un n -échantillon de X est un n -uplet de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X .

- Une réalisation d'un n -échantillon est un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ où, pour tout i , x_i est la valeur prise par X_i .
- **Estimateur :**
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon.
Un estimateur est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$.
- Estimation :
L'estimation de θ est la réalisation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de l'estimateur T_n .



- **Biais d'un estimateur :**

Si pour tout θ , T_n admet une espérance, le biais de T_n est le réel : $b(T_n) = E(T_n) - \theta$.

L'estimateur T_n de θ est dit sans biais si $E(T_n) = \theta$.



- **Risque quadratique d'un estimateur**

Si T_n^2 admet une espérance, le risque quadratique de T_n est le réel :

$$r(T_n) = E((T_n - \theta)^2) \quad ; \quad \text{On a : } r_\theta(T_n) = V_\theta(T_n) + (b_\theta(T_n))^2$$

- Le risque quadratique d'un estimateur sans biais n'est rien d'autre que sa variance.
- Un estimateur est d'autant meilleur que son risque est faible.

★ Estimation par intervalle de confiance :

- Soient U_n et V_n deux estimateurs. On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$ (ou au risque α , au seuil α) où $\alpha \in [0, 1]$ si, pour tout $\theta \in \Theta$, $P_\theta([U_n \leq \theta \leq V_n]) \geq 1-\alpha$.
- Intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de Bernoulli :
L'intervalle $\left[\bar{X}_n - \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}} ; \bar{X}_n + \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}} \right]$ est un intervalle de confiance au niveau au moins $1-\alpha$.

**Exercice corrigé**

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, a]$

On note $T_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a .
2. Calculer son risque quadratique.

Correction

1. $E(T_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

De plus, pour tout i compris entre 1 et n , $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}[0, a]$. Donc $E(X_i) = \frac{a}{2}$.

Dès lors, $E(T_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a}{2} = \frac{2}{n} \times n \times \frac{a}{2} = a$.

T_n est bien un estimateur sans biais de a .

2. Son risque quadratique est donc égal à sa variance.

$$\begin{aligned} r(T_n) &= V(T_n) = V\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ \Leftrightarrow r(T_n) &= \frac{4}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \text{ car } V(mX) = m^2 V(X). \\ \Leftrightarrow r(T_n) &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ car les variables aléatoires sont indépendantes.} \end{aligned}$$

De plus, pour tout i compris entre 1 et n , $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}[0, a]$. Donc $V(X_i) = \frac{a^2}{12}$.

Dès lors, $r(T_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{a^2}{12} = \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3n}$.



★ Complément (difficile) : variables $T_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi continue de fonction de répartition $F_X(x)$.

Pour déterminer les densités de ces variables, il faut d'abord déterminer leurs fonctions de répartition.

Déterminons la fonction de répartition de M_n . Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x).$$

Or, $\max(X_1, \dots, X_n)$ est inférieur à un nombre si, et seulement si, tous les X_i sont eux-mêmes plus petits que ce nombre. C'est-à-dire :

$$F_{M_n}(x) = P([X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x])$$

$$\Leftrightarrow F_{M_n}(x) = P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \text{ par indépendance des } X_i.$$

$$\text{Finalement, } F_{M_n}(x) = (F_X(x))^n.$$

$$\text{La densité de } M_n \text{ est finalement } f_{M_n}(x) = F'_{M_n}(x) = n \times F'_X(x) \times (F_X(x))^{n-1}.$$

Déterminons la fonction de répartition de T_n . Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(T_n > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x).$$

Or, $\min(X_1, \dots, X_n)$ est supérieur à un nombre si, et seulement si, tous les X_i sont eux-mêmes plus grands que ce nombre. C'est-à-dire :

$$P(T_n > x) = P([X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x])$$

$$\Leftrightarrow P(T_n > x) = P(X_1 > x) \times \dots \times P(X_n > x) \text{ par indépendance des } X_i.$$

$$\text{Finalement, } P(T_n > x) = (1 - F_X(x))^n \text{ puis :}$$

$$F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = 1 - P(T_n > x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

La densité de T_n s'en déduit par dérivation.

XI. Statistiques

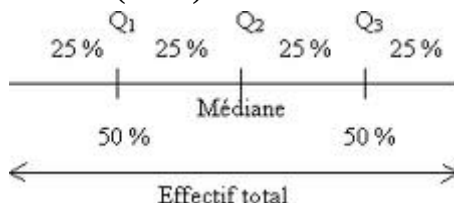
★ Statistiques univariées :

- Caractéristiques de position :

- ✓ Le mode est la valeur la plus fréquente, c'est à dire de plus grand effectif.
- ✓ La moyenne arithmétique $\bar{x}$ d'une série statistique est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_px_p}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i .$$

- ✓ La médiane M d'une série est la valeur qui partage la série étudiée ordonnée en deux sous-groupes de même effectif chacun.
 - Si l'effectif est impair, la médiane est la valeur centrale.
 - Si l'effectif est pair, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales.
- ✓ Le premier (troisième) quartile est le plus petit élément des valeurs des termes de la série tel qu'au moins 25 % (75 %) des données lui soient inférieures ou égales.



- Caractéristiques de dispersion :

- ✓ L'étendue d'une série est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.
- ✓ L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$ et l'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.
Par définition, cet intervalle contient 50 % des mesures.
- ✓ La variance d'une donnée statistique est :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{n} = \frac{n_1 x_1^2 + \dots + n_p x_p^2}{n} - \bar{x}^2$$

- ✓ L'écart-type est alors : $\sigma = \sqrt{V}$.

★ Statistiques bivariées :

- Principe : on s'intéresse au lien éventuel de deux caractères x_i et y_i .
- Nuage de points : le plan étant muni d'un repère, nous pouvons associer au couple $(x_i; y_i)$ de la série statistique double, le point M_i de coordonnées x_i et y_i .
- Point moyen : il s'agit du point de coordonnées $x_G = \bar{x}$ et $y_G = \bar{y}$.

- Méthode des moindres carrés

- ✓ On appelle covariance de la série statistique à deux variables x et y le nombre réel :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

- ✓ La droite de régression de y en x a pour équation :

$$y = a x + b \text{ où : } a = \frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x)^2} \text{ et } b = \bar{y} - a \bar{x}$$

- ✓ La droite de régression passe par le point moyen.

- ✓ Le coefficient de corrélation linéaire est : $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

- ρ est un nombre sans dimension et on admet que $-1 \leq \rho \leq 1$.
- On estime que la corrélation est bonne lorsque $|\rho|$ est proche de 1.
- Ne pas confondre forte corrélation et relation de cause à effet.

Scilab



I. Interaction avec l'utilisateur

- ★ La commande **`x=input('message')`** écrit le message à l'écran, attends la réponse de l'utilisateur et stocke cette réponse dans la variable `x`.
- ★ La commande **`disp('message')`** écrit le message (entre guillemets) à l'écran.
La commande **`disp(u)`** écrit à l'écran la valeur de la variable `u`.



II. Nombres et opérations élémentaires

- ★ Les nombres décimaux se notent avec un point et non une virgule.
- ★ Le signe `=` est réservé à l'affectation d'une variable (par exemple : `x=3`).
- ★ Constantes prédéfinies : `%pi` pour π et `%e` pour e .
- ★ Fonctions usuelles :
 - La commande **`log(x)`** calcule $\ln(x)$.
 - La commande **`exp(x)`** calcule e^x .
 - La commande **`floor(x)`** calcule la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .
 - La commande **`abs(x)`** calcule $|x|$, la valeur absolue de x .
 - La commande **`sqrt(x)`** calcule $\sqrt{x}$.
 - La commande **`ceil(x)`** renvoie le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x .
- ★ Opérations arithmétiques : ne pas oublier les parenthèses le cas échéant.
 - Addition : `+`, soustraction : `-`, multiplication : `*`, division : `/` et puissance : `^`.
- ★ Opérateurs de comparaisons pour les tests :
 - Test d'égalité : `==` (à ne pas confondre avec l'affectation d'une variable).
 - Test de différence : `<>`.
 - Tests de comparaison : `<`, `<=`, `>`, `>=`.
 - Commandes `and` et `or` pour les tests logiques.

III. Matrices

★ Création de vecteurs et matrices

- Vecteur ligne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des espaces ou des virgules.

<pre>--> [-2 1 1.5] ans = -2. 1. 1.5</pre>	<pre>--> [2,1,1.5] ans = 2. 1. 1.5</pre>
--	--

- Vecteur colonne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des points virgules.

```
--> [-2;1;1.5]
ans =

-2.
 1.
 1.5
```



- Matrice : les éléments sont écrits entre crochets ; les éléments d'une ligne sont séparés par des virgules ; les lignes sont séparées par des points virgules.

```
--> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
A =

1.    2.    3.
4.    5.    6.
7.    8.    9.
```

★ Création automatique de vecteurs lignes (utile pour les graphiques)



- La commande **a:b** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de a à b espacées de 1.

```
--> 1:6
ans =

1.    2.    3.    4.    5.    6.
```

- La commande **a:p:b** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de a à b espacées de p .

<pre>--> 0:0.2:1 ans = 0. 0.2 0.4 0.6 0.8 1.</pre>	<pre>--> 1:3:14 ans = 1. 4. 7. 10. 13.</pre>
---	--

- La commande **linspace(a,b,n)** renvoie un vecteur ligne contenant n valeurs équiréparties entre a et b .

```
--> linspace(0,10,6)
ans =

    0.    2.    4.    6.    8.   10.
```

★ Matrices prédéfinies



- La commande **zeros(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ (n lignes et p colonnes) remplie de 0.

```
--> zeros(3,5)
ans =

    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.

--> zeros(1,6)
ans =

    0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

- La commande **ones(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ remplie de 1.

```
--> ones(4,3)
ans =

    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
```

- La commande **eye(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ avec des 1 sur la « diagonale » et des 0 ailleurs (eye(3,3) renvoie donc à I_3 par exemple).

```
--> eye(3,5)
ans =

    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.
```

★ Opérations sur les matrices



- La commande **$u(k)$** renvoie le k -ième élément d'un vecteur u .

```
--> u=1:2:15
u =

    1.    3.    5.    7.    9.   11.   13.   15.

--> u(4)
ans =

    7.
```



- La commande **$\text{length}(u)$** renvoie la taille (la longueur) du vecteur u .
- La commande **$\text{inv}(A)$** renvoie l'inverse d'une matrice carrée A .
- La commande **A'** renvoie la transposée de la matrice A .
- Les commandes **$A+B$, $A-B$, $A*B$, A^n** traduisent les opérations connues sur les matrices.
- Les commandes **$A.*B$, $A./B$, $A.^n$** (avec le point) sont des opérations composantes par composantes, utiles dans les représentations graphiques de fonctions.
- Si u est un vecteur déjà défini, la commande **$u(k) = \dots$** modifie ou rajoute un élément à la k -ième position. Cela permet de construire un vecteur pas à pas (très utile pour les suites).



```
--> u=[1,2,3];

--> u(4)=8.5
u =

    1.    2.    3.    8.5

--> u(7)=-2
u =

    1.    2.    3.    8.5    0.    0.   -2.
```

- La commande **$A(i,j)$** renvoie le coefficient $a_{i,j}$ (i -ième ligne et j -ième colonne) de la matrice A .
- La commande **$A(i,:)$** renvoie la i -ième ligne de la matrice A .
- La commande **$A(:,j)$** renvoie la j -ième colonne de la matrice A .
- Si u est un vecteur déjà défini, la commande **$u=[u,x]$** rajoute l'élément x à la fin du vecteur u .
- La commande **$\text{spec}(A)$** renvoie les valeurs propres de A dans un vecteur colonne.
- La commande **$[P,D]=\text{spec}(A)$** renvoie une matrice diagonale D contenant les valeurs propres de A et une matrice P contenant les vecteurs propres associés.

IV. Structures fondamentales



★ Boucle for

- Structure classique :


```

      ..①..
      for ..②.. (do)
          ..③..
      end
      
```
- Il s'agit d'une boucle dont **on contrôle le nombre de répétitions** grâce à la condition ②.
- ① représente en général les conditions initiales.
- ② s'exprime sous la forme $k=a:b$. C'est-à-dire qu'une variable k est créée puis qu'elle va prendre une à une toutes les valeurs de a jusqu'à b . Par exemple, la condition $k=1:n$ signifie qu'il y aura n répétitions de l'instruction ③.
- L'instruction ③ sera répétée autant de fois que la condition ② le prévoit.
- **Exemples :**

Script 1

```

u=1
for k=1:4
    u=u+2
end
disp(u)

```

Explication 1

Au début, u vaut 1

4 répétitions « +2 » sont programmées

Affichage 1

9

Script 2

```

u=zeros(1,5)
u(1)=1
for k=1:4
    u(k+1)=u(k)+2
end
disp(u)

```

Explication 2

Au début, u vaut 0,0,0,0,0

Puis u vaut 1,0,0,0,0

4 répétitions sont programmées
on calcule $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ et $u(5)$

Affichage 2

1. 3. 5. 7. 9.

Script 3

```

u=ones(1,5)
for k=2:5
    u(k)=u(k-1)+2
end
disp(u)

```

Explication 3

Au début, u vaut 1,1,1,1,1

4 rép. sont programmées
on calcule $u(2)$, ... , $u(5)$

Affichage 3

1. 3. 5. 7. 9.

★ Boucle **while**

- Structure classique :


```

      ..①..
      while ..②.. do
          ..③..
      end
      
```
- Il s'agit d'une boucle dont **on ne contrôle pas le nombre de répétitions**. La boucle continue tant que la condition ② est valable.
- Cette structure est adaptée lorsque l'on recherche un seuil à atteindre ou à dépasser.
- Il est souvent intéressant de créer un compteur de boucles pour savoir combien de boucles ont été effectuées.
- **Exemples :**

Script 1

```

u=1
while u<=10000
    u=u*2
end
disp(u)
  
```

Affichage 1

```

16384
  
```

Script 2

```

u=1
n=0
while u<=10000
    u=u*2
    n=n+1
end
disp(n)
  
```

Affichage 2

```

14
  
```

Explication 1 :

Ce script décrit les termes d'une suite géométrique de raison 2. Au début u vaut 1. Tant que u est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2. En multipliant par 2, u augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000. À ce moment-là, u vaut 16384.

Explication 2 :

*Au début u vaut 1 et n vaut 0. Tant que u est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2, mais, dans le même temps, n est augmenté de 1. n est donc un **compteur de boucles**. En multipliant par 2, u augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000. À ce moment-là, il y a eu 14 boucles d'effectuées.*



★ Structures conditionnelles

if :

```

if .... then
    ....
end

```

if / else :

```

if .... then
    ....
else
    ....
end

```

If / elseif / else :

```

if .... then
    ....
elseif ... then
    ....
else
    ....
end

```

Exemple : que calcule le programme suivant ?

```

function y=f(x)
    y=x^2-2
endfunction
a=0
b=2
e=10^-5
while b-a>e
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)>0 then a=m
    else b=m
    end
end
disp(m)

```

Ce programme calcule la valeur approchée d'une équation de type $f(x) = 0$ (en général en lien avec le théorème de la bijection).

Ici, $f(x) = x^2 - 2$. Comme on travaille sur l'intervalle $[0, 2]$, ce programme calcule une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$.

Remarque : la définition d'une fonction Scilab est abordée, plus précisément, au paragraphe VI.

V. Simulations en probabilités

★ Simulation de lois uniformes continue et discrète



- La commande **rand()** renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
Elle simule donc une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
- La commande **rand(n,m)** renvoie une matrice $n \times m$ dont chaque terme est un nombre aléatoire entre 0 et 1.
- La commande **n*rand()** simule la loi uniforme continue sur $[0,n]$.
- La commande **(b-a)*rand()+a** simule la loi uniforme continue sur $[a,b]$.
- La commande **floor(n*rand())** simule la loi uniforme discrète sur $0, n-1$.
- La commande **floor(n*rand())+1** simule la loi uniforme sur $1, n$.



★ Simulation des lois et variables usuelles

- La fonction **grand(n,m,"nom",parametres)** renvoie une matrice de taille $n \times m$ de réels représentant des simulations de la loi usuelle précisée dans les paramètres.
- **grand(n,m,"def")** a la même fonction que **rand(n,m)**.
- **grand(n,m,"unf",a,b)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi uniforme continue sur l'intervalle réel $[a,b]$.
- **grand(n,m,"uin",a,b)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi uniforme discrète sur l'intervalle d'entiers a, b .
- **grand(n,m,"bin",N,p)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi binomiale de paramètres N et p .
- **grand(n,m,"geom",p)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi géométrique de paramètre p .
- **grand(n,m,"poi",mu)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi de Poisson de paramètre μ .
- **grand(n,m,"exp",1/lambda)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi exponentielle de paramètre λ .

Attention au paramètre : il s'agit de l'espérance de la loi.

- **grand(n,m,"nor",mu,sigma)** renvoie à $n \times m$ réels représentant des simulations de la loi normale de paramètres μ et σ^2 .
- **grand(n,"markov",A',X0)** renvoie n états successifs de la chaîne de Markov de matrice de transition A et d'état initial X_0 (état non affiché et non compté dans les n états successifs par Scilab).



★ Simulation d'une probabilité égale à p

Exemple 1 :

```
if rand()<p then
    ....                // réalisé avec probabilité p
else
    ....                // réalisé avec probabilité 1-p
end
```

Exemple 2 : simulation d'une probabilité égale à 0,25

```
x=grand(n,m,"uin",1,4)
if x==1 then
    ....                // réalisé avec probabilité 0,25
else
    ....                // réalisé avec probabilité 0,75
end
```



VI. Définition d'une fonction en Scilab

★ **Exemple 1 :** pour définir la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$ en Scilab, on procède de la manière suivante :

```
function y=f(x)
    y=x^2*exp(-x)
endfunction
```

★ **Exemple 2 :** pour définir la fonction $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en Scilab, on procède de la manière suivante :

```
function y=g(x)
    if x>0 then
        y=exp(-x)
    else
        y=0
    end
endfunction
```

- ★ **Exemple 3** : pour définir, en Scilab, la fonction aléatoire qui renvoie au nombre de tirages nécessaires, lors d'une partie de pile ou face, pour obtenir pour la première fois quatre face consécutivement, on procède de la manière suivante :

```
function y=quatrefaces()
    face=0
    y=0
    while face<4
        y=y+1
        piece=rand(1,1,'uin',0,1) //piece=floor(2*rand())
        if piece==1 then face=face+1
        else face=0
        end
    end
endfunction
```

- ★ La variable `y` est muette et doit contenir le résultat du calcul de la fonction.
- ★ Une fois la fonction définie, on l'appelle par son nom pour l'utiliser : par exemple, avec les exemples précédents, `f(1)` renvoie à `e`, `g(-2)` renvoie à `0` et `quatrefaces()` renvoie au nombre de tirages issues de la simulation demandée.

VII. Graphiques

★ Fonction d'une variable



- La commande `plot(x,y)` ou `plot2d(x,y)` (avec `x` et `y` deux vecteurs de même taille) trace une courbe reliant les points de coordonnée (x, y) , $((x, y))$ parcourant les vecteurs `x` et `y`.
- La commande `plot2d(x,y,-0)` (avec l'option `-0`) trace les points de coordonnées (x, y) sans les relier entre eux (pour tracer les termes d'une suite par exemple).
- **Exemple :**
Une première méthode pour tracer la courbe de la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur $[0, 2]$ est

```
x=0:0.1:2
y=(x.^2).*exp(-x)           // penser au . pour la multiplication terme à terme
plot(x,y)                   // ou plot2d(x,y)
```

- La commande **plot(x, f)** ou **fplot2d(x, f)** (avec f une fonction définie en Scilab et x un vecteur pour les abscisses) trace le graphe de la fonction f.

- **Exemple :**

Une deuxième méthode pour tracer la courbe de la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 2]$ est :

```
function y=f(x)
    y=x^2*exp(-x)
endfunction

x=0:.1:2
plot(x,f) // ou fplot2d(x,f)
```

★ Diagrammes et histogrammes



- La commande **bar(x, y)** (avec x et y deux vecteurs de même longueur) trace un diagramme en bâtons avec x en abscisses et y en ordonnées.



- La commande **histplot(x, y)** (avec x et y deux vecteurs) dessine un histogramme des données contenues dans le vecteur y en utilisant les classes x.
- La commande **histplot(n, y)** (avec n un entier et y un vecteur) dessine un histogramme des données contenues dans le vecteur y en n classes équiréparties.
- La commande **histplot** peut être utilisée en probabilité pour « reconnaître » des lois de variables aléatoires connues (discrètes ou à densité)
- La commande **pie(x)** (avec x un vecteur de nombres réels strictement positifs) trace un diagramme en camembert avec des secteurs proportionnels aux réels de x.

VIII. Statistiques

★ Statistiques à une variable



- Les commandes **min(x)** et **max(x)** renvoient le minimum et le maximum du vecteur x.



- La commande **mean(x)** renvoie la moyenne du vecteur x.
Si $x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$, `mean(x)` renvoie 2.5.
Cette commande est utile en probabilités pour estimer une espérance.
- La commande `median(x)` renvoie la médiane (soit la valeur centrale soit la moyenne des deux valeurs centrales de la série ordonnée) du vecteur x.
Si $x = [1 \ 2 \ 3 \ 12]$, `median(x)` renvoie 2.5.
- La commande `sum(x)` renvoie la somme du vecteur x.
Si $x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$, `sum(x)` renvoie 10.



- La commande **cumsum(x)** renvoie les sommes cumulées croissantes du vecteur x.
Si $x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$, `cumsum(x)` renvoie $[1 \ 3 \ 6 \ 10]$.



- La commande `tabul(x, 'i')` construit le tableau des effectifs des différents éléments du vecteur x en rangeant les valeurs dans l'ordre croissant ('i' pour « increase »).
Si $x = [1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1]$, `tabul(x, 'i')` renvoie :

1.	4.
2.	2.
3.	1.

- L'instruction `v=tabul(x, 'i')` est utile pour construire un diagramme en bâton (avec la commande `bar`). Il est alors nécessaire d'extraire la première colonne et la deuxième colonne. La première colonne est obtenue avec la commande `v(:,1)` et la deuxième colonne avec l'instruction `v(:,2)`. On peut donc appliquer la commande `bar(v(:,1), v(:,2))`.
- La commande `dsearch(x,y)` renvoie au numéros de la classe de chaque éléments de x parmi les classes prédéfinies par y.
Si $x = [9 \ 8 \ 3 \ 9 \ 1 \ 6 \ 3 \ 8 \ 2 \ 1]$ et $y = [0 \ 1 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 3.5 \ 4 \ 6 \ 10]$,
`dsearch(x,y)` renvoie $[8 \ 8 \ 4 \ 8 \ 8 \ 7 \ 4 \ 8 \ 4 \ 2]$.
En effet, les 9 valeurs de y créent 8 classes d'intervalles $]0,1],]1,2],]2,2.5], \dots,]6,10]$, numérotée de 1 à 8. Le 9 (1^{er} élément de x) est dans le 8^e intervalle (1^{er} élément de `dsearch(x,y)`), et ainsi de suite... C'est en quelque sorte une matrice de « position ».

- L'instruction `[a,b]=dsearch(x,y)` renvoie à deux réponses :
 - la liste `b`, liste du nombre de valeurs (effectifs) dans chaque classe ;
 - la liste `a`, liste des positions (des numéros de classe) identique à celle obtenue avec `dsearch(x,y)`.

Si `x=[9 8 3 9 1 6 3 8 2 1]` et `y=[0 1 2 2.5 3 3.5 4 6 10]`,

`[a,b]=dsearch(x,y)` renvoie :

```

b =
    0.    1.    0.    3.    0.    0.    1.    5.

a =
    8.    8.    4.    8.    8.    7.    4.    8.    4.    2.
  
```

Ainsi, par exemple, le 1^{er} intervalle $]0,1]$ ne comprend aucune valeur de `x` tandis que le 8^e en comprend 5...

Cette commande peut être utile pour construire un histogramme.

- La commande `corr(x,1)` : renvoie la variance de la série statistique `x`.
- La commande `sqrt(corr(x,1))` : renvoie l'écart-type de la série statistique `x`.
- La commande `stdev(x)` : renvoie l'écart-type estimé de la population dont est extraite la série statistique `x`.

★ Statistiques à deux variables

- La commande `corr(x,y,1)` : renvoie la covariance des séries statistiques `x` et `y`.

